



دانشکده‌ی فنی و مهندسی

گروه آموزشی مکانیک

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد  
در رشته‌ی مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

**عنوان:**

**بررسی اثرات محیط حرارتی روی ارتعاش آزاد صفحات اریب هدفمند با محرک  
پیزوالکتریک به روش بدون المان**

استاد راهنما:

دکتر رضا پیل افکن

پژوهشگر:

خدیجه هادی پور بهمیری

پاییز 96

نام خانوادگی دانشجو: هادی پور بهمیری	نام: خدیجه
عنوان پایان نامه: بررسی اثرات محیط حرارتی روی ارتعاش آزاد صفحات اریب هدفمند با محرک پیزوالکتریک به روش بدون المان	
استاد راهنما: دکتر رضا پیل افکن	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: مهندسی مکانیک
گرایش: طراحی کاربردی	دانشگاه: محقق اردبیلی
دانشکده: فنی و مهندسی	تاریخ دفاع: 96/07/05
	تعداد صفحات: 127
چکیده:	
<p>در این پژوهش، تحلیل ارتعاش آزاد صفحات هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در محیط حرارتی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش بدون المان میانمایی نقطه‌ای شعاعی ارائه شده است. با استفاده از این روش عددی، متغیر میدان بوسیله‌ی گره‌های پخش شده در صفحه میانی حوزه‌ی مسئله میانمایی می‌شود و از آنجا که ارتباطی بین گره‌ها وجود ندارد، می‌توانند به صورت کاملاً اختیاری توزیع شوند. صفحه از مواد مدرج تابعی شامل دو فاز سرامیک و فلز تشکیل شده است. در صفحه هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک، فرض بر این است که خواص مواد هسته در جهت ضخامت و براساس توزیع تابع توانی تغییر می‌کند. پتانسیل الکتریکی، تابعی خطی در جهت ضخامت هر یک از زیر لایه‌های پیزوالکتریک فرض شده است. برای سطوح لایه‌های پیزوالکتریک دو شرط مرزی الکتریکی وجود دارد: (1) شرط مرزی مدار بسته که در آن پتانسیل الکتریکی روی سطوح لایه‌ها صفر در نظر گرفته شده است (اتصال به زمین). (2) شرط مرزی مدار باز که در آن جابجایی الکتریکی سطوح صفر می‌باشد. در کار حاضر شرایط مرزی الکتریکی، مدار بسته اتخاذ شده است. در بررسی‌های انجام شده مشاهده می‌شود که با افزایش توان کسر حجمی و غالب شدن فاز فلزی بر سرامیک افت فرکانس اتفاق می‌افتد. افزایش دما نیز باعث افت فرکانس می‌شود. این در حالی است که افزایش قیود صفحه بر مقدار فرکانس ارتعاش می‌افزاید. از طرف دیگر افزایش نسبت ضخامت به طول صفحه هدفمند باعث افزایش فرکانس و با افزایش ضخامت لایه‌های پیزو الکتریک ابتدا شاهد کاهش فرکانس و سپس افزایش آن هستیم. با افزایش زاویه اریب در توان کسر حجمی ثابت، فرکانس افزایش می‌یابد و با افزایش توان کسر حجمی در یک زاویه اریب از پیش تعیین شده، فرکانس به تدریج کاهش می‌یابد.</p>	
کلید واژه‌ها: ارتعاش آزاد-تئوری برشی مرتبه اول-روش میانمایی نقطه‌ای شعاعی-لایه پیزوالکتریک- مواد تابع هدفمند	

## فهرست مطالب

شماره و عنوان	صفحه
---------------	------

### فصل اول: مفاهیم اساسی

1-1- مقدمه	2
1-2- معرفی مواد با تابع هدفمند (FGM)	3
1-3- مواد پیزوالکتریک	4
1-4- تئوری‌های صفحه	5
1-5- روش حل	6
1-6- نوع تحلیل	8
1-7- پیشینه‌ی پژوهش	9
1-8- روش بدون المان	12

### فصل دوم: مبانی نظری پژوهش

2-1- مقدمه	16
2-2- ساخت توابع شکل RPIM	16
1-2-2- خواص توابع شکل میانمایی نقطه‌ای شعاعی	19
2-3- تعریف مسئله و استخراج معادلات حرکت	20
1-3-2- آرایش هندسی	20
2-3-2- میدان جابجایی	21
3-3-2- روابط تنش و کرنش	22
2-4- روش میانمایی نقطه‌های شعاعی برای صفحه هدفمند	23
1-4-2- فرمول بندی RPIM	23
2-4-2- اصل انرژی	25
3-4-2- محاسبات مربوط به لایه‌های پیزوالکتریک	27
2-5- تحلیل فرکانسی	32
2-6- اعمال شرایط مرزی	33

## فصل سوم: بحث و نتایج

- 36-1-3- مقدمه.....
- 36-2-3- خواص مواد هدفمند.....
- 37-3-3- تأثیر محیط حرارتی بر خصوصیات مواد.....
- 38-4-3- اعتبارسنجی.....
- 38-1-4-3- نتایج عددی تحلیل فرکانسی صفحه از جنس مواد هدفمند.....
- 42-2-4-3- نتایج عددی تحلیل فرکانسی صفحه مستطیلی از جنس مواد هدفمند در محیط حرارتی.....
- 43-3-4-3- نتایج عددی تحلیل فرکانسی صفحه از جنس مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک.....
- 45-3-5- مقایسه تأثیر عدم حضور و حضور لایه‌های پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی در دمای محیط.....
- 45-3-5-1- تأثیر توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی صفحه تحت شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC و دمای محیط  $T=300k$  بدون لایه‌های پیزوالکتریک.....
- 46-3-5-2- تأثیر توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی صفحه تحت شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC و دمای محیط  $T=300k$  با لایه‌های پیزوالکتریک.....
- 49-3-6- نتایج عددی تحلیل فرکانسی صفحه مستطیلی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در محیط حرارتی.....
- 49-3-6-1- تأثیر توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی تحت شرایط مرزی مختلف در محیط حرارتی.....
- 49-3-6-1-1- تأثیر توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی صفحه تحت شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC و دمای محیط  $T=500k$ .....
- 49-3-6-1-2- تأثیر توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی صفحه تحت شرایط مرزی SFSC، SFSC و CSCS و دمای  $T=500k$ .....
- 54-3-6-2- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی.....
- 54-3-6-2-1- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CFFF.....
- 57-3-6-2-2- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی SSSS.....
- 59-3-6-2-3- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CCCC.....
- 62-3-6-3- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف در محیط حرارتی.....
- 63-3-6-3-1- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی صفحه تحت شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC و دمای محیط  $T=300k$ .....
- 63-3-6-3-2- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC و دمای  $T=500k$ .....

- 3-3-6-3- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی SFSC, SFSF و CSCS و دمای  $T = 500 \text{ k}$  ..... 67
- 3-6-3-4- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف ..... 68
- 3-6-3-1- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CFFF ... 69
- 3-6-3-2- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی SSSS .... 71
- 3-6-3-3- تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CCCC .. 72
- 3-6-3-5- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف .... 74
- 3-6-3-1- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CFFF ..... 75
- 3-6-3-2- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی SSSS ..... 76
- 3-6-3-3- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CCCC ..... 78
- 3-6-3-6- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی مختلف ..... 81
- 3-6-3-1- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CFFF ..... 81
- 3-6-3-2- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی SSSS ..... 82
- 3-6-3-3- تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CCCC ..... 84
- 7-3- نتایج عددی تحلیل فرکانسی صفحه اریب هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در محیط حرارتی ..... 86
- 3-7-1- تأثیر توان کسر حجمی و زاویه اریب روی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه اریب در شرایط مرزی مختلف در محیط حرارتی ..... 87
- 3-7-1-1- تأثیر توان کسر حجمی و زاویه اریب  $\alpha$  روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CFFF و در محیط حرارتی ..... 87
- 3-7-1-2- تأثیر توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CCCC و در محیط حرارتی تحت زوایای مختلف  $\alpha$  ..... 89
- 3-7-2- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی صفحه اریب ..... 91
- 3-7-2-1- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه اریب در شرط مرزی CFFF ..... 92
- 3-7-2-2- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CCCC ..... 94
- 8-3- نمودارهای سه بعدی صفحه مستطیلی و اریب هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک ..... 96
- 8-3-1- تأثیر افزایش دما و ضخامت لایه پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی صفحه هدفمند مستطیلی ..... 97

- 2-8-3- تأثیر توان کسر حجمی و نسبت ضخامت صفحه هدفمند مستطیلی به طول  $h/a$  روی فرکانس طبیعی .... 98
- 3-8-3- تأثیر افزایش دما و نسبت ضخامت صفحه هدفمند به طول  $h/a$  روی فرکانس طبیعی صفحه مستطیلی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک ..... 99
- 4-8-3- تأثیر افزایش توان کسر حجمی و زاویه اریب روی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه اریب هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک ..... 100
- 5-8-3- تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه اریب هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک ..... 101

### فصل چهارم: نتیجه گیری

- 1-4- تحلیل نتایج ..... 103
- 2-4- پیشنهادات برای کارهای آتی ..... 104
- فهرست منابع و مأخذ ..... 105

## فهرست جدول‌ها

شماره و عنوان	صفحه
جدول 2-1: توابع شکل پایه شعاعی با پارامترهای شکل بی‌بعد.....	17
جدول 3-1: خواص مواد اجزای ماده صفحه هدفمند.....	37
جدول 3-2: خواص وابسته به دمای ماده هدفمند.....	37
جدول 3-3: خواص ماده پیزوالکتریک.....	38
جدول 3-4: فرکانس بدون بعد صفحه هدفمند مستطیلی (AL/AL <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )، a/h=10 و CFFF.....	39
جدول 3-5: همگرایی فرکانس بدون بعد صفحه هدفمند مستطیلی (AL/AL <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )، a/h=10 و CFFF.....	40
جدول 3-6: فرکانس بدون بعد صفحه اریب هدفمند (AL/ZrO <sub>2</sub> )، a/h=10 و CCCC.....	41
جدول 3-7: فرکانس بدون بعد صفحه اریب هدفمند (AL/ZrO <sub>2</sub> )، a/h=10 و CFFF.....	42
جدول 3-8: فرکانس بدون بعد صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide)، a/h=10 و شرط مرزی CCCC.....	42
جدول 3-9: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)، h/a=0.1 و شرایط مرزی الکتریکی Closed.....	44
جدول 3-10: همگرایی فرکانس بدون بعد صفحه هدفمند (Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)، h/a=0.1 و شرایط الکتریکی Closed و n=0.....	44
جدول 3-11: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) بدون لایه‌های پیزوالکتریک، h=0.05 a=b=1، T=300K.....	46
جدول 3-12: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)، hp=0.01 و h=0.05 a=b=1، T=300K.....	47
جدول 3-13: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)، hp=0.01 و h=0.05 a=b=1، T=500K.....	50
جدول 3-14: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)، hp=0.01 و h=0.05، a=b=1، T=500K.....	52

- جدول 3-15: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CFFF و  $hp=0.01$  و  $h=0.05$  ،  $a=b=1$ ،  
55.....
- جدول 3-16: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... SSSS و  $hp=0.01$  و  $h=0.05$  ،  $a=b=1$ ،  
58.....
- جدول 3-17: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CCCC و  $hp=0.01$  و  $h=0.05$  ،  $a=b=1$ ،  
60.....
- جدول 3-18: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) .....  $n=1$  و  $2h=0.1$  ،  $a=b=1$  ،  $T=300K$   
63.....
- جدول 3-19: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) .....  $n=1$  و  $2h=0.1$  ،  $a=b=1$  ،  $T=500K$   
65.....
- جدول 3-20: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) .....  $n=1$  و  $h=0.05$  ،  $a=b=1$  ،  $T=500K$   
67.....
- جدول 3-21: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CFFF و  $n=1$  ،  $h=0.05$  ،  $a=b=1$   
69.....
- جدول 3-22: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... SSSS و  $n=1$  ،  $h=0.05$  ،  $a=b=1$   
71.....
- جدول 3-23: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CCCC و  $n=1$  ،  $h=0.05$  ،  $a=b=1$   
73.....
- جدول 3-24: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CFFF و  $T=500K$  ،  $hp=0.1$  ،  $2h=0.2$  ،  $2h=0.1$  ،  $2h=0.05$  ،  $a=b=1$   
75.....
- جدول 3-25: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... SSSS و  $T=500K$  ،  $hp=0.1$  ،  $2h=0.2$  ،  $2h=0.1$  ،  $2h=0.05$  ،  $a=b=1$   
77.....
- جدول 3-26: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CCCC و  $T=500K$  ،  $hp=0.1$  ،  $2h=0.2$  ،  $2h=0.1$  ،  $2h=0.05$  ،  $a=b=1$   
79.....
- جدول 3-27: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CFFF و  $n=1$  ،  $hp=0.1$  ،  $2h=0.2$  ،  $2h=0.1$  ،  $2h=0.05$  ،  $a=b=1$   
81.....
- جدول 3-28: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... SSSS و  $n=1$  ،  $hp=0.1$  ،  $2h=0.2$  ،  $2h=0.1$  ،  $2h=0.05$  ،  $a=b=1$   
83.....
- جدول 3-29: فرکانس طبیعی صفحه هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4) ..... CCCC و  $n=1$  ،  $hp=0.1$  ،  $2h=0.2$  ،  $2h=0.1$  ،  $2h=0.05$  ،  $a=b=1$   
85.....



جدول 30-3: فرکانس بدون بعد صفحه اریب هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)،  $a=b=1$ ،  $h=0.1$ ،  $hp=0.01$ ،  $T=1000$  k و CFFF..... 88

جدول 31-3: فرکانس بدون بعد صفحه اریب هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)،  $a=b=1$ ،  $h=0.1$ ،  $hp=0.01$ ،  $T=1000$  k و CCCC..... 90

جدول 32-3: فرکانس بدون بعد صفحه اریب هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)،  $a=b=1$ ،  $h=0.1$ ،  $hp=0.01$ ،  $\alpha=45^\circ$  و CFFF..... 93

جدول 33-3: فرکانس بدون بعد صفحه اریب هدفمند (Ti-6Al-4V/Aluminum oxide) با لایه‌های پیزوالکتریک (PZT-4)،  $a=b=1$ ،  $h=0.1$ ،  $hp=0.01$ ،  $\alpha=45^\circ$  و CCCC..... 95

## فهرست شکل‌ها

شماره و عنوان	صفحه
شکل 1-1: تفاوت در نحوه‌ی مدل‌سازی یک مساله دلخواه در دو روش المان محدود و بدون المان.....	7
شکل 2-1: گره‌های مشخص کننده صفحه و نواحی محافظ مستطیلی و دایره‌ای .....	8
شکل 1-2: نمای شماتیک صفحه هدفمند همراه با لایه‌های پیزوالکتریک .....	20
شکل 2-2: هندسه صفحه اریب هدفمند .....	21
شکل 3-2: سلول‌های زمینه‌ی سازنده صفحه و گره‌های درون شبکه .....	32
شکل 4-2: توزیع گره‌ای منظم در صفحه اریب .....	33
شکل 1-3: نمودار مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به توان کسر حجمی برای دو وضعیت با و بدون در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک .....	48
شکل 2-3: تغییرات فرکانس طبیعی مود دوم نسبت به توان کسر حجمی در شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC ..	51
شکل 3-3: تغییرات فرکانس طبیعی مود دوم نسبت به توان کسر حجمی در شرایط مرزی SFSC، SFSF و CSCS ..	53
شکل 4-3: تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CFFF .....	56
شکل 5-3: مقایسه تأثیر افزایش توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در سه مود مختلف و دماهای 400 و 1000 کلوین و در شرایط مرزی CFFF .....	57
شکل 6-3: تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی SSSS .....	59
شکل 7-3: تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CCCC .....	61
شکل 8-3: نمودار مقایسه‌ای تأثیر افزایش دما روی فرکانس طبیعی .....	62
شکل 9-3: تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک در دمای $T=300\text{ k}$ و شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC روی فرکانس طبیعی .....	64
شکل 10-3: تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک در دمای $T=500\text{ k}$ و شرایط مرزی CFFF، SSSS و CCCC روی فرکانس طبیعی .....	66

- شکل 3-11: تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک در دمای  $T=500\text{ k}$  و شرایط مرزی SFSC, CSCS و روی فرکانس طبیعی ..... 68
- شکل 3-12: تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CFFF ..... 70
- شکل 3-13: تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی SSSS ..... 72
- شکل 3-14: تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CCCC ..... 74
- شکل 3-15: تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CFFF ..... 76
- شکل 3-16: تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی SSSS ..... 78
- شکل 3-17: تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی در شرط مرزی CCCC ..... 80
- شکل 3-18: تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CFFF ..... 82
- شکل 3-19: تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی SSSS ..... 84
- شکل 3-20: تأثیر نسبت ضخامت به طول  $h/a$  و دما روی فرکانس طبیعی در شرایط مرزی CCCC ..... 86
- شکل 3-21: تأثیر توان کسر حجمی و زاویه اریب  $\alpha$  روی فرکانس طبیعی بدون بعد در شرایط مرزی CFFF ..... 89
- شکل 3-22: تأثیر توان کسر حجمی و زاویه اریب  $\alpha$  روی فرکانس طبیعی بدون بعد در شرایط مرزی CFFF ..... 91
- شکل 3-23: تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی بدون صفحه اریب در شرایط مرزی CFFF ..... 94
- شکل 3-24: تأثیر افزایش دما و توان کسر حجمی روی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه اریب در شرایط مرزی CCCC ..... 96
- شکل 3-25: نمودار سه بعدی تأثیر افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و دما روی فرکانس طبیعی ..... 97
- شکل 3-26: نمودار سه بعدی تأثیر توان کسر حجمی و نسبت ضخامت به طول  $h/a$  روی فرکانس طبیعی ..... 98
- شکل 3-27: نمودار سه بعدی تأثیر افزایش دما و نسبت ضخامت به طول  $h/a$  روی فرکانس طبیعی ..... 99
- شکل 3-28: نمودار سه بعدی تأثیر توان کسر حجمی و زاویه اریب  $\alpha$  روی فرکانس بدون بعد صفحه اریب ..... 100
- شکل 3-29: نمودار سه بعدی تأثیر توان کسر حجمی و دما روی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه اریب ..... 101

### فهرست علائم اختصاری

مفهوم یا توضیح	علامت اختصاری
انرژی جنبشی	V
انرژی پتانسیل	$\Pi$
اندازه‌ی ناحیه‌ی محافظ	$d_s$
اندازه بی‌بعد ناحیه محافظ	$\alpha_s$
اپراتور ماتریس کرنش جابجایی	B
بردار کرنش	$\varepsilon$
بردار میدان الکتریکی	E
بردار جابجایی الکتریکی	$D_p$
بردار جابجایی محلی	q
بردار جابجایی کلی	Q
توان کسر حجمی	n
تابع پتانسیل الکتریکی	$\varphi$
تنش در لایه‌ی حسگر	$\sigma_s$
تنش در لایه‌ی عملگر	$\sigma_a$
توابع پایه چند جمله‌ای	$P_j(x)$
توابع شکل	$\phi_i$
تابع پایه چند جمله‌ای	$P(x)$
تعداد جملات پایه‌ای	m
توابع پایه شعاعی	$R(x)$
نقطه خاص فرضی	$x_Q$
تعداد گره‌های درون ناحیه محافظ	n
تنش عمودی در راستای X	$\sigma_{xx}$
تنش عمودی در راستای Y	$\sigma_{yy}$
تنش برشی در راستای XY	$\tau_{xy}$

ثوابت برای توابع پایه شعاعی	$a_i$
ثوابت برای توابع پایه چند جمله‌ای	$b_j$
جابجایی کلی در جهت X	$u$
جابجایی کلی در جهت Y	$v$
جابجایی کلی در جهت Z	$w$
جابجایی صفحه میانی در جهت X	$u_0$
جابجایی صفحه میانی در جهت Y	$v_0$
جابجایی صفحه میانی در جهت Z	$w_0$
دمای محیط حرارتی	$T$
دوران حول محور X	$\psi_x$
دوران حول محور Y	$\psi_y$
ضریب تصحیح برشی	$k$
ضخامت لایه پیزوالکتریک	$h_p$
ضخامت لایه هدفمند میانی	$h$
فرکانس طبیعی سیستم	$\omega$
فرکانس بدون بعد سیستم	$\lambda$
فضای ناحیه محافظ	$\bar{\Omega}$
فاصله گرهی میانگین	$d_c$
کرنش عمودی در راستای X	$\varepsilon_{xx}$
کرنش عمودی در راستای Y	$\varepsilon_{yy}$
کرنش عمودی در راستای Z	$\varepsilon_z$
کرنش برشی در راستای XZ	$\gamma_{xz}$
کرنش برشی در راستای YZ	$\gamma_{yz}$
کرنش برشی در راستای XY	$\gamma_{xy}$
کسر حجمی فاز مواد	$V$
کسر حجمی فلز	$V_m$
کسر حجمی سرامیک	$V_c$
ماتریس ممان شعاعی	$R_0$
ماتریس ممان چند جمله‌ای	$P_m$
ماتریس وارون پذیر	$G$
ماتریس الاستیک مواد	$D$
مدول الاستیسیته	$E$
ماتریس الاستیسیته	$C$
ماتریس ثابت دی‌الکتریک	$\varepsilon$
ماتریس ثابت پیزوالکتریک	$e$

ماتریس سختی کلی	$K_{uu}$
ماتریس جرم کلی	$M_{uu}$
ماتریس سختی محلی	$k_{uu}$
ماتریس سختی محلی	$k_{\varphi u}$
ماتریس سختی محلی	$k_{u\varphi}$
ماتریس جرم محلی	$m_{uu}$
نسبت پواسون	$\vartheta$

فصل اول:

**مفاهيم اساسی**

## 1-1- مقدمه

صفحه یک المان سازه‌ای است که یک بعد آن نسبت به دو بعد دیگر نسبتاً کوچکتر است و ساختاری مسطح دارد (لیزا و کاتا<sup>1</sup>، 2011). صفحه جزئی رایج در بسیاری از انواع سطوح با کارایی بالا<sup>2</sup> نظیر راکتورهای هسته‌ای، وسایل نقلیه‌ی هوایی، فضاپیماها و موشک‌ها و به عنوان پنل<sup>3</sup> در سازه‌ی کشتی‌ها و پل‌ها و کاربردهای متنوع دیگر می‌باشد (زو و لی‌یو<sup>4</sup>، 2011). صفحات مستطیلی و اریب المان‌های ساختاری مهمی هستند که به‌طور گسترده‌ای در سازه‌های مدرنی نظیر هواپیماها، کشتی‌ها، وسایل نقلیه‌ی ریلی، سیستم‌های کف<sup>5</sup> و پل‌ها استفاده می‌شوند. بنابراین درک درستی از رفتار دینامیکی اجزای این ساختارها برای طراحان سازه بسیار حیاتی می‌باشد (افتخاری و جعفری، 2013). اخیراً مواد با تابع هدفمند<sup>6</sup>، به عنوان یک طبقه از ساختارهای کامپوزینی پیشرفته که دارای خصوصیات منحصر به فردی از جمله قابلیت تحمل بارهای مکانیکی و حرارتی بالا و تغییر پیوسته و ملایم خواص در جهت‌های دلخواه می‌باشد، برای برآوردن نیاز صنایع گوناگون مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در گذشته برای کنترل ارتعاشات سازه‌ها تنها از سیستم‌های انفعالی مانند سیستم جرم-فنر-دمپر استفاده می‌شد. محدودیت‌های زیاد این روش‌ها از جمله دامنه‌ی فرکانسی کم، استهلاک ارتعاشات و صدا به صورت انرژی گرمایی و مهم‌تر از همه وزن بالای آن موجب شد محققین به کنترل فعال روی بیاورند. سازه‌های هوشمند<sup>7</sup> به سازه‌هایی اطلاق می‌شود که در پاسخ به تحریک‌های خارجی، توانایی حس کردن و اعمال رفتارهای کنترل شده را دارا باشند، که در این میان مواد پیزوالکتریک<sup>8</sup> نقش مهمی را به عهده دارند. شناخت خصوصیات و همچنین روابط حاکم بر این نوع مواد گام مهمی در جهت طراحی و کاربرد مناسب سازه‌هایی از این جنس است. در گذشته بیشتر کارهای تحقیقاتی روی ارتعاش صفحات اریب براساس تئوری کلاسیک صفحه<sup>9</sup> انجام شده است که مربوط به صفحات نازک می‌باشد اما با افزایش ضخامت دقت حل به سرعت کاهش می‌یابد و به خاطر فرضیات در نظر گرفته شده در این تئوری دقت جواب بدست آمده با افزایش زوایه صفحه بدتر می‌شود که این مشکل با در نظر گرفتن تئوری

---

<sup>1</sup> Leissa & Qatu

<sup>2</sup> High-performance

<sup>3</sup> Panel

<sup>4</sup> Zhu & Iiew

<sup>5</sup> floor systems

<sup>6</sup> Functionally graded Material

<sup>7</sup> Smart Structure

<sup>8</sup> Piezoelectric

<sup>9</sup> Classical Plate Theory



میندلین<sup>۱۰</sup> برطرف می‌شود. به علت ساختار ریاضیاتی پیچیده معادلات دیفرانسیل بدست آمده برای صفحات اریب حل مسئله به کمک راه حل فرم بسته<sup>۱۱</sup> کار دشواری می‌باشد به این علت روش‌های عددی بدون المان<sup>۱۲</sup>، برای حل مسائل دوبعدی و سه بعدی، اخیراً مورد توجه محققین قرار گرفته است (ژائو و همکارانش<sup>۱۳</sup>، 2009).

## 2-1- معرفی مواد با تابع هدفمند (FGM)

در سالهای اخیر با توسعه‌ی موتورهای پرقدرت صنایع هوافضا، توربین‌ها و راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاومتر از لحاظ مکانیکی احساس شده است. در گذشته در صنایع هوافضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش و روکش قطعات با کارایی بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های پسماند نداشتند. تنش‌های پسماند در این مواد مشکلات زیادی از جمله ایجاد حفره و ترک می‌نمود. بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای<sup>۱۴</sup> استفاده شد. تنش‌های حرارتی در این مورد نیز موجب پدیده لایه لایه شدن<sup>۱۵</sup> می‌گردید. با توجه به این مشکلات طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکل لایه لایه شدن نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد.

مواد هدفمند، موادی با ریز ساختار غیرهمگن<sup>۱۶</sup> می‌باشند که خواص مکانیکی آنها بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این امکان با تغییرات تدریجی و پیوسته در کسر حجمی<sup>۱۷</sup> عناصر سازنده محقق می‌گردد.

این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده، دارای خواص مکانیکی موثری نسبت به مواد کامپوزیت لایه ای می‌باشند و معمولاً از دو ماده ساختاری سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. ماده ساختاری سرامیک به علت ضریب انتقال حرارت<sup>۱۸</sup> کم و مقاومت زیاد در مقابل درجه حرارت، دماهای بسیار بالا را تحمل کرده و ماده ساختاری فلز، انعطاف پذیری لازم را فراهم می‌کند (چاکراورتی و پرادهان<sup>۱۹</sup>، 2014).

<sup>10</sup> Mindlin Theory

<sup>11</sup> Close Form

<sup>12</sup> Meshles Method

<sup>13</sup> Zhou et al

<sup>14</sup> Laminated Composite

<sup>15</sup> Delaminating

<sup>16</sup> Inhomogeneous

<sup>17</sup> Volume Fraction

<sup>18</sup> Heat Transfer Coefficient

<sup>19</sup> Chakraverty & Pradhan

روش‌های مختلفی برای تعیین خواص موثر ترکیب از جمله مدول الاستیک موثر بکار می‌رود. از آن جمله می‌توان به قانون ترکیب<sup>۲۰</sup>، طرح خودشمول<sup>۲۱</sup>، تکنیک موری-تاناکا<sup>۲۲</sup>، رهیافت زمینه میانگین<sup>۲۳</sup> و المان حجمی نمونه<sup>۲۴</sup> اشاره کرد (مژدهی و همکارانش، 2011).

### 3-1- مواد پیزوالکتریک

پیزوالکتریسیته<sup>۲۵</sup> پدیده‌ای الکترومکانیکی<sup>۲۶</sup> است که در برخی مواد وجود دارد، این خاصیت میدان‌های تغییر شکل<sup>۲۷</sup> و میدان‌های الکتریکی<sup>۲۸</sup> را به یکدیگر مرتبط می‌سازد و تاثیر آنها بر روی هم را بیان می‌کند. در یک ماده پیزوالکتریک به هنگام قرار گرفتن در معرض تنش مکانیکی، ولتاژ یا بار الکتریکی به وجود می‌آید. این پدیده را اثر مستقیم پیزوالکتریک<sup>۲۹</sup> می‌نامند. از طرف دیگر اگر به یک ماده پیزوالکتریک یک ورودی ولتاژ القا شود، مجموعه‌ای از تنش‌ها و کرنش‌های مکانیکی در آن بوجود می‌آید. این پدیده را اثر معکوس پیزوالکتریک<sup>۳۰</sup> می‌نامند. در سازه‌های هوشمند از اثر مستقیم برای اندازه‌گیری کرنش‌ها و از اثر معکوس برای کنترل کرنش‌ها و ارتعاشات استفاده می‌شود. انواع مختلفی از مواد پیزوالکتریک در صنعت و تکنولوژی مورد استفاده قرار می‌گیرند از مهم‌ترین آنها می‌توان به سرامیک‌های پیزوالکتریک و پلیمرهای پیزوالکتریک اشاره کرد (تیزو<sup>۳۱</sup>، 1993). مهم‌ترین سرامیک‌های پیزوالکتریک عبارتند از: زیرکات تیتانات سرب<sup>۳۲</sup> و استرانسیوم تیتانات باریم<sup>۳۳</sup>. همچنین از بین پلیمرهای پیزوالکتریک می‌توان به پلی وینیلیدین فلوراید<sup>۳۴</sup> اشاره کرد. زیرکات-تیتانات سرب‌ها به عنوان دسته مهمی از مواد پیزوالکتریک دارای ساختار چند کریستالی می‌باشند.

<sup>20</sup> Rule of mixture

<sup>21</sup> Self-Consistent Scheme

<sup>22</sup> Mori-Tanaka Technique

<sup>23</sup> Mean Field Approach

<sup>24</sup> The Representative volume Element

<sup>25</sup> Piezoelectricity

<sup>26</sup> Electromechanical

<sup>27</sup> Deformation Field

<sup>28</sup> Electrical Field

<sup>29</sup> Direct Piezoelectric Effect

<sup>30</sup> Converse Piezoelectric Effect

<sup>31</sup> Tzou

<sup>32</sup> PZT

<sup>33</sup> BaSTO

<sup>34</sup> PVDF

#### 4-1- تئوری‌های صفحه

مسائل صفحه به سه دسته قابل تفکیک هستند: صفحات نازک<sup>۳۵</sup>، صفحه‌ی نسبتاً ضخیم<sup>۳۶</sup> و صفحه‌ی ضخیم<sup>۳۷</sup>. اگر ضخامت صفحه نسبت به دو بعد دیگر بسیار کوچک باشد، صفحه نازک است. اگرچه تعریف واضحی برای صفحه نازک ارائه نشده است در بسیاری از کاربردهای عملی اگر نرخ ضخامت کوچکترین بعد از دو بعد دیگر کمتر از 0/05 باشد می‌توان صفحه را نازک فرض کرد. اگر این نسبت حداقل 0/2 باشد می‌توان صفحه را ضخیم در نظر گرفت و اگر بین این دو مقدار باشد صفحه نسبتاً ضخیم در نظر گرفته می‌شود.

چندین تئوری برای آنالیز تغییر شکل ورق‌ها وجود دارد که عبارتند از: تئوری ورق نازک، که اغلب به عنوان تئوری ورق کلاسیک یا تئوری ورق کیرشهف<sup>۳۸</sup> مشهور است. تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول<sup>۳۹</sup> که به عنوان تئوری ورق میندلین شناخته می‌شود. تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم<sup>۴۰</sup>، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا<sup>۴۱</sup>؛ این تئوریها با اعمال فرضیات مشخصی در رابطه با تنش و کرنش در راستای ضخامت، بعد مساله را از سه به دو کاهش و به عنوان تئوریهای دو بعدی صفحه شناخته می‌شوند و تئوری سه بعدی الاستیسیته که در تحلیل سه بعدی صفحات ضخیم بکار می‌رود. در تئوری کلاسیک صفحه نازک، از اثر تغییر شکل برشی عرضی<sup>۴۲</sup> و اینرسی دورانی<sup>۴۳</sup> صرف نظر می‌شود.

این در حالی است که تغییرشکل برشی زمانی که ضخامت افزایش می‌یابد و نیز وقتی مدهای ارتعاشی بالا بررسی می‌شوند بسیار حائز اهمیت است. تا جائیکه برای صفحه نازک به منظور دستیابی به یک جواب دقیق باید اثر اینرسی دورانی در نظر گرفته شود. در تئوری کلاسیک تنها مولفه‌های تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  حضور دارند. در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول همانند تئوری کلاسیک دو فرض زیر معتبر است: خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل، بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی می‌مانند و خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول نمی‌دهند. اما در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، برخلاف فرضیات تئوری کلاسیک، صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی نمی‌مانند.

<sup>35</sup> Thin Plate

<sup>36</sup> Moderrately Thick Plate

<sup>37</sup> Thick Plate

<sup>38</sup> Kirchhoff Plate Theory

<sup>39</sup> First Order Shear Deformation Theory

<sup>40</sup> Third Order Shear Deformation Theory

<sup>41</sup> Higher Order Shear Deformation Theory

<sup>42</sup> Transverse Shear Deformation

<sup>43</sup> Rotational Inertia

در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مولفه‌های کرنش نرمال  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  و کرنش برشی  $\gamma_{xy}$  و  $\gamma_{yz}$ ،  $\gamma_{xz}$  وجود داشته و تنها مولفه کرنش نرمال  $\epsilon_z$  صفر است (نجفی‌زاده و همکارانش، 1389). بنابراین تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول بر مبنای فرض کرنش برشی عرضی ثابت در راستای ضخامت بیان شده است. برای جبران خطای ناشی از اتخاذ فرض مذکور، یک ضریب تصحیح برشی<sup>44</sup> معرفی می‌شود. در تئوری‌های مرتبه بالاتر، کرنش برشی عرضی به صورت تابعی از مختصات در جهت ضخامت بیان می‌شود.

## 5-1- روش حل

بیشتر پدیده‌های موجود در طبیعت به کمک معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی قابل بیان هستند. بدست آوردن راه حل تحلیلی دقیق برای این معادلات ایده‌آل می‌باشد. اما متأسفانه، اغلب به دلیل پیچیدگی مسائل تنها برای بخش کوچکی از مسائل عملی، راه حل دقیق وجود دارد. بنابراین از دیرباز روش‌های عددی برای یافتن پاسخ تقریبی بکار گرفته شدند.

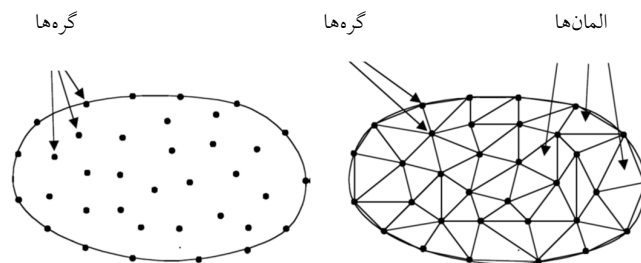
تکنیک‌های عددی با طرح گسسته‌سازی متفاوت از قبیل روش المان محدود<sup>45</sup> به‌طور گسترده در حل مسائل مهندسی مورد استفاده قرار گرفتند. در روش المان محدود یک ناحیه‌ی پیوسته به شکل‌های ساده هندسی که المان‌های محدود نامیده می‌شوند، تجزیه می‌شود. معادلات حاکم روی المان‌ها در نظر گرفته می‌شود و در نهایت با انجام یک فرآیند همگذاری، با در نظر گرفتن قیدها و بارگذاری‌ها دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که حل این معادلات رفتار تقریبی محیط پیوسته را ارائه می‌دهد.

علی‌رغم قدرت بالای روش المان محدود برای حل بسیاری از مسائل، این روش دارای محدودیت‌هایی نظیر: هزینه‌ی بالای ایجاد مش، دقت پایین در تعیین تنش، بخصوص در سطوح تماس المان‌ها، مشکل در تحلیل انطباقی، محدودیت و عدم دقت کافی در تحلیل مسائلی با تغییر شکل‌های بزرگ به دلیل اعوجاج المان، دشواری در مدل‌سازی رشد ترک که بر خطوط المان منطبق نیست و دشواری مدل‌سازی ماده‌ای که به تعداد زیادی قطعه شکسته شده است، می‌باشد. در دو دهه‌ی اخیر روش‌های بدون المان به عنوان یک دیدگاه جدید و نویدبخش از حوزه‌ی روش‌های عددی به منظور حل بخش بزرگی از مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی در مکانیک جامدات و سیالات بکار برده شده است. در این روش‌ها مدل محاسباتی توسط یک مجموعه از گره‌ها با توزیع دلخواه منظم یا

<sup>44</sup> Shear Correction Factor

<sup>45</sup> Finite Element Method (FEM)

نامنظم در ناحیه‌ی مدل، که نیازی به اتصال به المان‌ها ندارند، توصیف می‌شوند. بنابراین برای رسیدن به دقت دلخواه، گره‌ها می‌توانند به راحتی در هر جهتی افزوده یا حذف شوند. در شکل 1-1 نحوه‌ی مدل‌سازی هندسه‌ی مساله در دو روش المان محدود و بدون المان مقایسه شده است (لیو و گوو<sup>46</sup>، 2005).



شکل 1-1: تفاوت در نحوه‌ی مدل‌سازی یک مساله دلخواه در دو روش المان محدود و بدون المان

در روش المان محدود معادلات جبری محلی<sup>47</sup> با ارضای معادلات حاکم روی هر المان بدست می‌آیند. در حالیکه در روش بدون المان، به دلیل اینکه هیچ مش یا المانی وجود ندارد، تشکیل معادلات جبری محلی به ناچار باید روی گروهی از گره‌ها پیرامون یک نقطه خاص انجام شود. به عبارتی جهت میانمایی یک تابع میدان<sup>48</sup> مانند جابجایی در یک نقطه خاص  $x_Q$  از فضای  $\Omega$  که مرز و داخل آن با استفاده از توزیع دلخواه  $n$  گره مشخص می‌شود ناحیه‌ای به نام ناحیه‌ی محافظ<sup>49</sup> به مرکز  $x_Q$  با شکل و اندازه دلخواه در نظر گرفته می‌شود. بطوریکه تعداد مشخص از گره‌های توزیع شده در داخل آن قرار می‌گیرند. جهت تخمین تابع میدان مورد نظر در نقطه  $x_Q$  از گره‌های قرار گرفته در ناحیه محافظ آن استفاده شده و سایر گره‌ها تاثیری در مقدار تابع میدان مربوط به نقطه نخواهد داشت. اندازه ناحیه‌ی محافظ به مرکزیت نقطه‌ی  $x_Q$  با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود (لیو و گوو، 2005):

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (1-1)$$

که  $\alpha_s$  اندازه بی‌بعد ناحیه محافظ و  $d_c$  فاصله گرهی میانگین در نزدیکی نقطه  $x_Q$  است. ناحیه‌ی محافظ دو بعدی می‌تواند دایره‌ای و مستطیلی و در حالت سه بعدی به صورت مکعبی و کروی باشد. ناحیه‌ی محافظی که در

<sup>46</sup> Liu & Gu

<sup>47</sup> Local Algebraic Equations

<sup>48</sup> Field Function

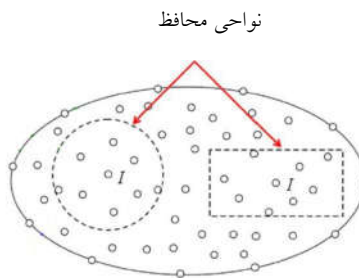
<sup>49</sup> Support Domain

پروژه‌ی حاضر مورد استفاده قرار گرفته است، مستطیلی به مرکزیت نقطه  $x_Q$  بوده و فاصله این نقطه تا هر ضلع آن به صورت زیر مشخص می‌شود (لیو و گوو، 2005):

$$d_{si} = \alpha_{si} d_{ci} \quad (2-1)$$

$$\alpha_{si} d_{ci}$$

که  $\alpha_{si}$  ( $i = x, y$ )، اندازه بی‌بعد ناحیه محافظ و  $d_{ci}$  ( $i = x, y$ ) میانگین فاصله گره‌ی در جهات  $i$  است. در شکل 2-1 گره‌های مشخص کننده صفحه و نواحی محافظ دایره‌ای و مستطیلی نشان داده شده است. بعد از ساخت ناحیه محافظ برای یک نقطه خاص، جابجایی در آن نقطه به صورت ترکیب خطی توابع شکل  $\Phi_i$  و جابجایی‌های  $u_i$  در تمام  $n$  گره درون ناحیه محافظ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین روابط جبری میان جابجایی‌های گره‌ی، با ارضای معادلات حاکم در ناحیه محافظ هر نقطه خاص بدست می‌آید و معادلات جبری محلی برای هر نقطه، به دستگاه معادلات کلی همگذاری می‌شود (لیو و گوو، 2005).



شکل 2-1: گره‌های مشخص کننده صفحه و نواحی محافظ مستطیلی و دایره‌ای

## 6-1- نوع تحلیل

برای تحلیل ارتعاش آزاد هر سازه به معادله حرکت آن نیاز می‌باشد. و در حالت کلی دستگاه معادلات حرکت صفحه که نحوه‌ی استخراج آن در فصل بعد آمده است بصورت زیر است (لیزا و کاتا، 2011):

$$M_{uu}\ddot{Q} + K_{uu}Q = 0 \quad (3-1)$$

که در آن  $M_{uu}$  ماتریس جرم،  $K_{uu}$  ماتریس سختی می‌باشد. در تحلیل ارتعاش آزاد، فرکانس‌های طبیعی<sup>۵۱</sup> و شکل مودهای<sup>۵۲</sup> یک سازه محاسبه می‌شود. در این نوع ارتعاش صفحه با ترکیبی از فرکانس‌های طبیعی خود

<sup>50</sup> Shape Function

<sup>51</sup> Natural Frequencies

حرکت می‌کند. شکل تغییر یافته سازه در یک فرکانس طبیعی خاص، شکل مود نامیده می‌شود. تحلیل فرکانسی، تحلیل مقدار ویژه<sup>۲</sup> نیز خوانده می‌شود. که در این تحلیل یک مساله مقدار ویژه حل خواهد شد و مقادیر ویژه حاصل نشان دهنده‌ی فرکانس‌های طبیعی و بردارهای ویژه‌ی متناظر نشان دهنده‌ی مود ارتعاشی مربوط به آن فرکانس طبیعی خواهد بود.

## 7-1- پیشینه‌ی پژوهش

بنابر مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشت، گروهی از مهندسين مواد آزمایشگاه هوافضای نینو، در سال 1984 در منطقه سندایی ژاپن برای اولین بار مفهوم مواد هدفمند را به عنوان مواد با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند (یامانوچی و همکارانش<sup>۳</sup>، 1990). از آن پس تکنیک‌های زیادی به منظور ساخت این مواد توسط محققین بکار گرفته شد.

در سالهای اخیر استفاده از مواد مرکب، به دلیل نیاز صنعت به تولید موادی با ویژگی‌های متنوع رشد روزافزونی داشته است. در این میان مواد پیزوالکتریک به علت قابلیت تبدیل انرژی‌های مکانیکی و الکتریکی به هم یا به عبارتی کوپلینگ الکترومکانیکی، واکنش سریع، دقت بالا به عنوان یک نمونه از مواد مرکب در طراحی و ساخت سازه‌های هوشمند مورد استفاده قرار گرفته‌اند (حسینی هاشمی و همکارانش، 1390).

تاکنون بررسی‌های متعددی روی صفحات مستطیلی و اریب هدفمند (FG)، صفحات پیزوالکتریک، صفحات هدفمند پیزوالکتریک (FGPM)<sup>۴</sup> و صفحات هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک انجام شده است. لیو و همکارانش<sup>۵</sup> (2004)، تحلیل دینامیکی صفحات کامپوزیتی با لایه‌ی پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر را با استفاده از روش بدون المان EFG<sup>۶</sup> انجام دادند. روش انتگرال گیری نیومارک  $\beta$  به منظور محاسبات مربوطه به کار گرفته شد. دای و همکارانش<sup>۷</sup> (2004)، تحلیل صفحات هدفمند را به کمک روش میانبایی نقطه‌ای شعاعی<sup>۸</sup> انجام دادند و به نتایج خوبی از لحاظ دقت و کارایی روش مورد نظر نسبت به روش المان محدود رسیدند. ژو و

---

<sup>1</sup> Modeshapes

<sup>2</sup> Eigenvalue Analysis

<sup>3</sup> Yamanouchi et al

<sup>4</sup> Functionally Graded piezoelectric Materials

<sup>5</sup> Liew & et al

<sup>6</sup> Element-free Galerkin (EFG)

<sup>7</sup> Dai & et al

<sup>8</sup> Radial Point Interpolation Method (RPIM)

همکارانش<sup>1</sup> (2006) مطالعه مشخصه‌های ارتعاش آزاد صفحات اریب ضخیم با شرایط مرزی اختیاری را براساس تئوری سه بعدی کرنش‌های الاستیک خطی کوچک انجام دادند. در این روش حوزه‌ی واقعی مسئله روی یک حوزه‌ی مکعبی پایه نگاشته شد و سپس معادله مقدار ویژه استخراج شده از تابع انرژی صفحه با استفاده از روش Chebyshev-Ritz حل شد. ژو و ژنگ (2008)، ارتعاش صفحات اریب را بوسیله روش عددی MLS-Ritz مورد مطالعه قرار دادند. یکی از چالش برانگیزترین مسائل محاسبات عددی در تحلیل ارتعاش صفحه اریب با زاویه اریب بزرگ، همگرایی کم به علت تنش منفرد در گوشه‌های زوایای منفرجه می‌باشد. برای حل اینگونه مسائل روش MLS-Ritz در این پژوهش به کار گرفته شده است. ژائو و همکارانش (2009)، تحلیل ارتعاش آزاد صفحه هدفمند را با استفاده از روش element-free kp-Ritz بررسی کردند. تقریب ذرات کرنل به منظور ارزیابی میدان جابجایی دو بعدی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به علت در نظر گرفتن برش عرضی و اینرسی دورانی به کار گرفته شد. در این پژوهش علاوه بر صفحه مستطیلی، صفحه اریب با زاویه  $\alpha$  نیز در نظر گرفته شد و از آنجا که برای گره‌هایی که روی لبه مایل قرار دارند ماتریس تبدیل، یکتا نمی‌باشد، روی لبه‌های مایل صفحه اریب تبدیل بین جابجایی کلی و محلی به منظور اعمال شرایط مرزی اعمال شد. زو و لی‌یو (2011)، تحلیل ارتعاش آزاد صفحات هدفمند نسبتاً ضخیم به کمک روش بدون المان Local Kriging<sup>2</sup> را برای تابع شکل اختیاری و شرایط مرزی مختلف بررسی نمودند. فرمول‌بندی بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و Local Petriv- Galerkin انجام شد. لوجا و همکارانش<sup>3</sup> (2013)، تحلیل صفحات هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک را به کمک روش B-spline finite strip به انجام رساندند. به منظور مدل سازی خواص صفحه هدفمند از مدل موری-تاناکا و همگن‌سازی ویت<sup>4</sup> استفاده شد. تئوری برشی مرتبه بالا و تئوری برشی مرتبه اول به منظور استخراج معادلات به کار گرفته شد. فرسنگی و همکارانش (2013)، راه حل تحلیلی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول برای ارتعاش آزاد صفحات نسبتاً ضخیم مرکب با لایه‌های پیزوالکتریک را ارائه دادند. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون بدست آمد و شرایط مرزی الکتریکی، مدار باز و مدار بسته در نظر گرفته شد. توسط افتخاری و جعفری (2013) فرمول‌بندی اصلاح شده ترکیبی Ritz-DQ برای بررسی ارتعاش آزاد صفحات ضخیم مستطیلی و اریب با شرایط مرزی کلی به کار گرفته شد. در این تکنیک، ابتدا به منظور گسسته‌سازی مشتقات جزئی، با در نظر گرفتن جهت مختصاتی صفحه، روش ریتز استفاده شد و سپس به کمک روش DQ شبیه‌سازی معادلات

<sup>1</sup> Zhou & et al

<sup>2</sup> Local Kriging meshless method

<sup>3</sup> Loja & et al

<sup>4</sup> Voigt homogenization



دیفرانسیل معمولی و جزئی سیستم حاصل انجام شد. چاکراورتی و پرادهان (2014)، ارتعاش آزاد صفحات هدفمند مستطیلی در محیط حرارتی با شرایط مرزی عمومی را مورد بررسی قرار دادند. روش رایلی-ریتز به منظور حل مسئله مقدار ویژه با شرایط مرزی مختلف به کار گرفت شد. سامی‌ردی و راجاگوپال<sup>1</sup> (2014)، از روش Meshless natural neighbor Galerkin method به منظور تحلیل خمش و ارتعاشات صفحه کامپوزیتی استفاده نمودند. سازگاری و همگرایی راه حل برای تنش و تغییر شکل با تغییر مرتبه تربیع گوس و تعداد گره‌ها مطالعه شده است. ویمال و همکارانش<sup>2</sup> (2014)، مطالعه ارتعاش آزاد صفحات اریب هدفمند نسبتاً ضخیم را به کمک روش المان محدود به انجام رساندند. در این پژوهش تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به منظور استخراج معادلات به کار گرفته شد. چن و همکارانش<sup>3</sup> (2015)، تحلیل ارتعاش آزاد صفحات هدفمند نسبتاً ضخیم را به روش بدون المان<sup>4</sup> MLNNI مطالعه نمودند. در این روش عددی حوزه‌ی تحلیل به زیر ناحیه‌های کوچک چندوجهی روی هم افتاده تقسیم شد. تابع شکل سه گره‌ای مثلثی المان محدود و NNI به عنوان تابع تست و تابع آزمایشی به کار گرفته شد. به منظور تحلیل صفحه‌ی اریب، از آنجائی‌که فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی مربعی وقتی بطور تحلیلی دوران داده می‌شود تغییر نمی‌کند، آنها در ابتدا یک صفحه مربعی که تحت زاویه  $\alpha$  دوران داده شده را به منظور ارزیابی کارایی روش خود در اعمال شرایط مرزی اساسی روی لبه‌های مایل مورد بررسی قرار دادند.

روزگار و آباد (2015)، راه حل تحلیلی برای ارتعاش آزاد صفحه ایزوتروپیک هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک را به کمک تئوری four-variable refine بکار گرفتند. معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون بدست آمد و روش حل نویر به منظور حل معادلات اتخاذ شد. در کار زنگ و همکارانش<sup>5</sup> (2015)، مشخصه‌های ارتعاشی صفحات هدفمند کامپوزیتی اریب نسبتاً ضخیم از جنس نانو تیوپ کربن با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مدل‌سازی شد و با استفاده از تقریب IMLS برای متغیرهای میدان، معادله مقدار ویژه گسسته‌سازی شده از روش ریتز استخراج شد. جین و ونگ<sup>6</sup> (2015)، روش المان تربیعی فرم ضعیف (QEM) جدیدی را برای تحلیل دقیق ارتعاش آزاد صفحات ایزوتروپیک اریب نازک با شرایط مرزی کلی اتخاذ کردند. سلیم

---

<sup>1</sup> Somireddy & Rajagopal

<sup>2</sup> Vimal & et al

<sup>3</sup> Chen & et al

<sup>4</sup> Meshless local natural neighbor interpolation

<sup>5</sup> Zhang & et al

<sup>6</sup> Jin & Wang

و همکارانش<sup>۱</sup> (2016)، ارتعاشات آزاد و کنترل فعال ارتعاشات صفحات هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک را مبنای روش بدون المان IMLS-Ritz و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی مورد بررسی قرار دادند و تأثیر شرایط مرزی مکانیکی و شرایط مرزی الکتریکی در دو وضعیت مدار باز و مدار بسته را روی فرکانس طبیعی تخمین زدند. نیوین یانگ و همکارانش<sup>۲</sup> (2017)، تحلیل استاتیکی، ارتعاش آزاد و کنترل دینامیکی صفحات هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر را با استفاده از روش CS-DSG3 با المان‌های مثلثی سه گره‌ای و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام دادند. حسینی هاشمی و همکارانش (1390)، تحلیل دقیق پاسخ-بسته ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی لوی-گونه را بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار دادند. در این کار معادله ماکسول با استفاده از تابع توزیع پتانسیل الکتریکی سینوسی در امتداد ضخامت لایه پیزوالکتریک ارضا گردید.

در این مطالعه اثر دما، توان کسر حجمی، شرایط مرزی، ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک، نسبت ضخامت لایه‌ی میانی هدفمند به طول، و تغییر زاویه  $\alpha$  در صفحه اریب روی فرکانس ارتعاش آزاد بررسی شده است. لازم به ذکر است در همه‌ی محاسبات صورت گرفته تأثیر دما بصورت محیط حرارتی در نظر گرفته شده است.

## 8-1- روش بدون المان

در دهه‌های اخیر، یک سبک جدیدی از روش عددی با نام روش بدون المان به علت انعطاف‌پذیری و عدم نیاز به المان‌بندی، توجه محققین زیادی در مکانیک محاسباتی را به خود جلب کرده است. پیشینه‌ی این روش به سال 1977 برمی‌گردد زمانیکه موناگان و جین‌گولد<sup>۳</sup> (1977) و لوسی<sup>۴</sup> (1977) یک روش لاگرانژی براساس روش تخمینی کرنل<sup>۵</sup> به منظور مدل کردن مسائل فیزیک نجومی ارائه دادند. این روش که SPH<sup>۶</sup> نامیده شد، روشی جزئی است که براساس ایده جایگزینی سیال با یک مجموعه از ذرات متحرک و تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم، به انتگرال تخمینی کرنل شکل گرفته است. از آن پس با بکاربردن این روش به منظور مدل کردن

<sup>1</sup> Selim & et al

<sup>2</sup> Nguyen-Quang & et al

<sup>3</sup> Monaghan & Gingold

<sup>4</sup> Lucy

<sup>5</sup> Kernel Estimates Method

<sup>6</sup> Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

مسائل دیگر بسیاری از نقاط ضعف این روش نظیر استحکام کششی<sup>۱</sup>، انرژی صفر<sup>۲</sup>، مشکل در اعمال شرایط مرزی اساسی<sup>۳</sup> آشکار شد.

بعد از یک دهه اولین روش بدون المان مبتنی بر تکنیک گالرکین یعنی روش المان پخش شده<sup>۴</sup> توسعه یافت. ایده بکار گرفته شده در این روش جایگزینی درونیابی روش المان محدود<sup>۵</sup> درون یک المان بوسیلهی درونیابی محلی کمترین مربعات متحرک<sup>۶</sup> بود.

چند سال بعد بیلشکو و همکارانش<sup>۷</sup> (1994) روش بدون المان گالرکین<sup>۸</sup> را پیشنهاد کردند. این روش از روش قبلی بسیار دقیق تر بود، اگرچه این ارتقای دقت باعث افزایش هزینه محاسبات می شد. محاسبه‌ی انتگرالها در این روش به ساختار سلولی زمینه<sup>۹</sup> نیاز دارد به این علت این روش یک روش نیمه مش فری محسوب می شود. از طرفی یک روش واقعا بدون به نام روش بدون المان محلی پتروگالرکین<sup>۱۰</sup> توسط اتلوری و ژو<sup>۱۱</sup> (1998) معرفی شد. در این روش فرم ضعیف محلی فرمول بندی باقیمانده پتروگالرکین به همراه تقریب MLS، بدون نیاز به مش زمینه برای ساخت معادلات سیستم بکار می رود. از آنجائیکه روش های نام برده مبتنی بر تقریب MLS هستند فاقد خاصیت تابع دلتای کرونیگر می باشند و به تکنیک های خاصی جهت ارضای شرایط مرزی اساسی نیاز است که زمان محاسبات را افزایش می دهد. به منظور اعمال آسان شرایط مرزی، روش درونیابی نقطه ای<sup>۱۲</sup> توسط لیو و گوو (2001) پیشنهاد شد.

در این روش تابع درونیابی که ممکن است چند جمله ای یا شعاعی باشد، از تمام گره های درون ناحیه ی محافظ گذرانده می شود. با ارضای فرم ضعیف یا فرم ضعیف محلی<sup>۱۳</sup> معادلات حاکم روی هر زیر ناحیه قبل از فرایند همگذاری نهایی، روابط جبری میان مقادیر گرهی بدست می آید.

به دلیل اینکه توابع شکل با روش درونیابی نقطه ای ایجاد شده اند دارای خاصیت دلتای کرونیگر هستند و شرایط مرزی اساسی در مقایسه با روش المان محدود راحت تر اعمال می شود. برای اینکه روش میانابی شعاعی از

---

<sup>1</sup> Tensile Stability

<sup>2</sup> Energy Zero

<sup>3</sup> Essential Boundary Condition

<sup>4</sup> Diffuse Element Method (DEM)

<sup>5</sup> Finite Element Method (FEM) Interpolation

<sup>6</sup> Moving Least Square (MLS) Local Interpolation

<sup>7</sup> Belytschko et al

<sup>8</sup> Element Free Galerkin (EFG) Method

<sup>9</sup> Background Cell

<sup>10</sup> Local Petrov-Galerkin Method (MLPG)

<sup>11</sup> Atluri & Zhu

<sup>12</sup> Point Interpolation Method (PIM)

<sup>13</sup> Local Weak Form

نظر عددی برای هر توزیع دلخواهی از گره‌ها پایا شود، همزمان از توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای برای ساخت تابع شکل استفاده می‌شود (لیو و گوو، 2005).

فصل دوم:

**مبانی نظری پژوهش**

Family name: Hadipour Behambari	Name: Khadijeh
Title of Thesis: Investigating the thermal environment effects on free vibration of functionally graded skew plates with piezoelectric actuators using a meshfree method	
Supervisor: R. Pilafkan	
Graduate Degree <b>M.Sc.</b>	
Major: Mechanical Engineering	Specialty: Solid Mechanics
University: <b>Mohaghegh Ardabili</b>	Faculty: Engineering
Graduation date: 2017/09/27	Number of page: 127
<p>Abstract:</p> <p>In this study, free vibration analysis of FGM plate with piezoelectric layers in thermal environment is presented on the basis of the first-order shear deformation plate theory and a meshless method with radial point interpolation. Using this numerical method, the field variable is interpolated by nodes scattered in the mid-plate of the problem domain. As no relation between nodes exists, they can be scattered arbitrarily. The plate is made of a functionally graded material consisted of two different phases of metal and ceramic. In the piezoelectric FGM plates, the properties of core material are assumed to be graded through the thickness according by the power-law distribution while the electric potential is assumed to be a linear function through the thickness of each piezoelectric sub-layer. Two sets of electric boundary conditions exist for surfaces of the piezoelectric layers including: (1) a closed-circuit condition in which the electric potential is kept at zero (grounded); and (2) an open-circuit condition in which the electric potential remains free (zero electric displacements). In this work a closed-circuit electric boundary condition is adopted. Through the examinations, it is seen that with increase in volume fraction exponent and domination of the metal phase over the ceramic phase, a drop in the frequency occurs. The elevation of temperature also causes a frequency drop. However increase of the constraints of the plate increases the frequency of vibration. On the other hand, the effect of the thickness to length ratio of the FGM plate increases the frequency and increases the thickness of the piezoelectric layers first causes a drop in the frequency and then increases it. The increase of skew angle in the constant volume fraction exponent causes increases the frequency and with increases the volume fraction exponent in constant skew angle a drop in the frequency gradually occurs.</p>	
<p>Keywords: First order shear deformation theory (FSDT), Free vibration, Functionally Graded Materials (FGM), piezoelectric layers, Radial Point Interpolation Method (RPIM),</p>	



**University of Mohaghegh Ardabili**

**Faculty of Engineering**

**Department of mechanical Engineering**

**Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
M.Sc. in mechanical engineering - solid mechanics**

Title:

**Investigating the thermal environment effects on free vibration of  
functionally graded skew plates with piezoelectric actuators using a  
meshfree method**

Supervisor:

**Reza pilafkan (Ph. D)**

By:

**Khadijeh Hadipour Behambari**

September - 2017