



دانشگاه محقق اردبیلی  
دانشکده‌ی علوم  
گروه آموزشی فیزیک

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد  
در رشته‌ی فیزیک گرایش بنیادی (نظری)

**عنوان:**

**بررسی فاز هندسی در نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی**

استاد راهنما:

دکتر قادر نجار باشی

پژوهشگر:

نیلوفر کریمی دهکردی

تابستان 1396

نام خانوادگی دانشجو: کریمی دهکردی	نام: نیلوفر
عنوان پایان نامه: بررسی فاز هندسی در نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی	
استاد راهنما: دکتر قادر نجار باشی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: فیزیک
گرایش: بنیادی (نظری)	دانشگاه: محقق اردبیلی
دانشکده: علوم	تاریخ دفاع: 96/6/26
تعداد صفحات: 123	
چکیده:	
<p>فاز بری یا فاز پنچاراتنام، عبارت است از مقایسه تغییرات فاز یک کمیت فیزیکی در اثر تغییر آن کمیت روی یک منحنی بسته در فضای حالت سیستم. این فازها که از لحاظ تجربی قابل اندازه گیری هستند از این حقیقت ناشی می-شوند که فضای پارامتر یک سیستم کوانتومی وابسته به زمان، ممکن است دارای انحنا باشد و از این رو هولونومی از چنین انحنایی ناشی شود. فاز بری سه خاصیت کلیدی دارد که باعث می شود مفهوم آن اهمیت زیادی پیدا کند. اولاً فاز بری ناوردای پیمانه ای است. ویژه توابع توسط یک معادله خطی همگن تعریف می شوند و از این رو دارای آزادی پیمانه ای ضربی در یک عامل فاز کلی که مستقل از پارامتر است می باشد. فاز بری (صرف نظر از یک عامل فاز <math>2\pi</math>) با چنین عامل فازی بدون تغییر باقی می ماند به شرط آنکه ویژه تابع روی یک حلقه تک مقدار باشد. این باعث می شود فاز بری یک کمیت فیزیکی شود که توسط پدیده های تداخل به طور تجربی قابل اندازه گیری هستند. ثانیاً فاز بری یک مفهوم هندسی است، یعنی می توان آن را به صورت یک انتگرال خطی یک حلقه در فضای پارامتر نوشت که بستگی به نرخ تغییرات روی حلقه دارد. این خاصیت باعث می شود که بتوان فاز بری را بر حسب کمیت های هندسی موضعی در فضای پارامتر نوشت. در واقع خود بری نشان داد که می توان این فاز را به صورت یک انتگرال میدان (انحنای بری) روی سطح نوشت. انحنای بری نقش اساسی در دینامیک های مؤثری با متغیرهایی با درجات آزادی کند بازی می کند. ثالثاً فاز بری تشابه نزدیکی با نظریه های میدان پیمانه ای و هندسه دیفرانسیل دارد. این باعث زیبایی، شهود و مفهوم یکسان در علم فیزیک می شود.</p>	
کلید واژه ها: حالت های خالص، حالت های مخلوط، درهم تنیدگی کوانتومی، فاز بری - پنچاراتنام	

## فهرست مطالب

شماره و عنوان مطالب	صفحه
فصل اول: فاز هندسی و محاسبات کوانتومی	
1-مقدمه.....	1
2	
1-1- فاز هندسی و محاسبات کوانتومی	
6.....توپولوژیک.....	6
1-2- فاز	
6.....هندسی.....	6
1-2-1- انتقال موازی.....	
7	
1-2-2- کره	
10.....بلوخ.....	10
1-2-3- انتقال موازی بی-	
13.....دررو.....	13
1-2-4- فاز هندسی	
15.....کلاسیک.....	15
1-2-5- درک تجربی رابطه	
17.....پانچاراتنام.....	17
1-2-6- توپولوژی اثرآهارانوف بوهم	
22.....	22
1-3- محاسبات	
23.....کوانتومی.....	23
1-3-1- ورودی‌های منطقی	
24.....کوانتوم.....	24

**فصل دوم: فاز هندسی حالات درهم‌تنیده و حالات مخلوط**

2-1- رویکرد حرکتی فاز هندسی حالات مخلوط در تحول غیریکانی.....

28

2-1-1- محاسبه فاز کوانتومی حالت مخلوط غیر تبهگن.....

28

2-1-2- ارزیابی فاز هندسی به عنوان پیمانۀ ثابت و محاسبه در حد تحول یکانی.....

31

2-1-3- تست تجربی فاز هندسی و خالص‌سازی.....

32

2-1-4- مثال فیزیکی محاسبه فاز هندسی.....

33

2-1-5- بررسی فاز هندسی حالت تبهگن.....

34

2-2- رابطه‌ی فاز هندسی بین سیستم‌های دو جزئی درهم‌تنیده و زیرسیستم-

هایش.....36

2-2-1- فاز هندسی غیر تناوبی حالات درهم‌تنیده.....

37

2-2-2- فاز هندسی تناوبی حالات درهم‌تنیده.....

38

2-2-3- مقایسه فاز حالات درهم‌تنیده با حالات

مخلوط.....41

2-2-4- روابط فاز تحت شرایط انتقال موازی.....

43

.....2-3- فاز هندسی حالات مخلوط در تداخل سنجی.....

48

.....2-3-1- حالات مخلوط، فازها و تداخل.....

49

.....2-3-2- شرط انتقال موازی و فاز

.....52 هندسی.....

.....2-3-3- خالص سازی.....

56

### فصل سوم: فاز هندسی و گذار فاز کوانتومی

.....3-1- گذار فاز کوانتومی، درهم‌تنیدگی و فاز هندسی سیستم دو‌کیوبیت.....

60

.....3-1-1- سیستم دو‌کیوبیتی با تعامل XY.....

62

.....3-1-2- رابطه درهم‌تنیدگی و گذار فاز کوانتومی.....

65

.....3-1-3- رابطه وفاداری و گذار فاز کوانتومی.....

66

.....3-1-4- رابطه فاز هندسی و گذار فاز کوانتومی.....

67

.....3-1-5- کره تک قطبی مغناطیسی.....

67

.....3-2- مقیاس بندی فازهای هندسی نزدیک به گذار فاز کوانتومی در زنجیره XY.....

72

.....3-2-1- رابطه بین فاز هندسی حالت پایه و بحرانی‌دگی کوانتوم.....

74

.....3-2-2- رابطه بین فاز هندسی و گذار فاز کوانتومی.....

77

ت

.....3-2-3- روش دیگر بررسی رابطه بین فاز هندسی و بحرانی‌گی کوانتومی

79

.....3-2-4- اساس گذار فاز

.....81 کوانتومی

.....3-2-5- فاز هندسی در سیستم‌های بسا ذره‌ای

84

### فصل چهارم: مقایسه فاز هندسی حالات همدوس درهم‌تنیده متعادل و نامتعادل

.....4-1- فاز هندسی حالات همدوس متعادل و نامتعادل درهم‌تنیده تحت نوسانگر غیر جفت شده

87

.....4-1-1- نتیجه

.....93 گیری

.....4-2- فاز هندسی حالات همدوس متعادل و نامتعادل درهم‌تنیده تحت نوسانگر جفت شده

95

.....4-2-1- نتیجه

.....102 گیری

منابع و

.....104 مآخذ

## فهرست شکل‌ها

شماره و عنوان شکل	صفحه
شکل 1-1: فاز بین دو حالت مختلف.....	7
شکل 1-2: انتقال موازی بین دو بردار در دو نقطه‌ی مختلف.....	8
شکل 1-3: انتقال فاز در کره‌ی بلوخ.....	11
شکل 1-4: فاز هندسی کلاسیک.....	16
شکل 1-5: تداخل سنج ماخ برای اندازه‌گیری فاز پانچاراتنام.....	19
شکل 1-6: اثر آهارانوف بوهم.....	23
شکل 1-2: اندازه‌گیری تداخل سنجی دو ذره برای اندازه‌گیری فازها در حالت خالص درهم‌تنیده – اندازه‌گیری فاز حالت مخلوط در زیرسیستم a با چشم‌پوشی از زیرسیستم b.....	46
شکل 1-3: (a) شکاف انرژی بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته برای دو کیوبیت نوع XY – (b) فاز حالت پایه مدل XY.....	64
شکل 2-3: (a) تلافی $C( \psi_0\rangle)$ حالت پایه $ \psi_0\rangle - (b)$ وفاداری $F$ بین $ E_-^0\rangle$ و $ \psi_0\rangle$ به صورت تابعی از $\lambda, \gamma$ .....	66

شکل 3-3: کره‌ی تک قطبی مغناطیسی .....  
69

شکل 4-3: تقاطع رنر- تار در نقطه  $\lambda = 0$  و  $\gamma = 1$  .....  
71

شکل 3-5: (a) فاز هندسی حالت پایه  $\beta_g$  (b) مشتق فاز هندسی  $d\beta_g/d\lambda$  .....  
78

شکل 3-6: نمودار مشتق فاز هندسی  $d\beta_g/d\lambda$  برای مدل آیزینگ  $\gamma = 1$  بر حسب  $\lambda$  .....  
80

شکل 3-7: (a) حداکثر مشتق فاز هندسی  $d\beta_g/d\lambda$  برای نقطه‌ی شبه بحرانی  $\lambda_m$  (b) مشتق فاز

هندسی  $d\beta_g/d\lambda$  برای حدود ترمودینامیکی لگاریتمی نزدیک نقاط بحرانی ..... 82

شکل 3-8: مقدار  $F = [1 - \exp(\frac{d\beta_g}{d\lambda} - \frac{d\beta_g}{d\lambda}|_{\lambda_m})]$  به صورت تابع  $N(\lambda - \lambda_c)$  برای  $N$  های مختلف .....  
83

شکل 4-1: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس متعادل بر حسب  $\nu$  ( $\omega_1\tau = \omega_2\tau = 1$  و  $\alpha = 2$ ) و  $\beta = 1$  .....  
90

شکل 4-2: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس متعادل بر حسب  $\nu$  ( $\omega_1\tau = \omega_2\tau = 1$  و  $\alpha = 2$ ) و  $\beta = 2.01$  .....  
91

شکل 4-3: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس نامتعادل بر حسب  $\nu$  ( $\omega_1\tau = \omega_2\tau = 1$ ) و  $\beta = 1$  و  $\alpha = 2$  .....  
91

شکل 4-4: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس نامتعادل بر حسب  $\nu$  ( $\omega_1\tau = \omega_2\tau = 1$ ) و  $\beta = 2.01$  و  $\alpha = 2$  .....  
92

شکل 4-5: تغییرات فاز هندسی حالات همدوس متعادل و نامتعادل بر حسب  $\omega_1\tau, \omega_2\tau$  و  $\alpha = -2$  و  $\beta = -1$  و  $\nu = -1$  .....  
92



شکل 4-6: تغییرات فاز هندسی حالات همدوس متعادل و نامتعادل بر حسب  $\omega_1\tau, \omega_2\tau$  ( $\alpha = 0$  و  $\beta = 1$ ) و

.....( $\nu = 1$ )  
93

شکل 4-7: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس متعادل بر حسب  $\eta$  ( $\omega\tau = 1$  و  $\alpha = 0.1$ ) و

.....( $\beta = 1$ ) 99

شکل 4-8: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس متعادل بر حسب  $\eta$  ( $\omega\tau = 1$  و  $\alpha = 0.8$ ) و

.....( $\beta = 1$ ) 100

شکل 4-9: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس نامتعادل بر حسب  $\eta$  ( $\omega\tau = 1$  و  $\alpha = 0.1$ ) و

.....( $\beta = 1$ ) 100

شکل 4-10: تغییرات فاز هندسی حالت همدوس نامتعادل بر حسب  $\eta$  ( $\omega\tau = 1$  و  $\alpha = 0.8$ ) و

.....( $\beta = 1$ ) 101

شکل 4-11: تغییرات فاز هندسی حالات همدوس متعادل و نامتعادل بر حسب  $\alpha, \beta$  ( $\eta = 0$  و  $x = 1$ ) و

.....( $\nu = 1$ )  
101

شکل 4-12: تغییرات فاز هندسی حالات همدوس متعادل و نامتعادل بر حسب  $\alpha, \beta$

.....( $\nu = 1$  و  $x = 1$  و  $\eta = 0.8$ )  
102

# فصل اول:

فاز هندسی و محاسبات کوانتومی

## 1-مقدمه

فاز یکی از مهم‌ترین مفاهیم در کوانتوم است. وقتی ما یک سیستم را تحت تحول بی‌دررو و دوره‌ای قرار می‌دهیم، اطلاعاتی از حرکت خودش را به صورت فاز هندسی<sup>1</sup> در اختیار ما قرار می‌دهد. با پیدایش علم اطلاعات کوانتومی کاربردهای فاز هندسی معرفی شدند. از فاز هندسی در محاسبات کوانتومی استفاده می‌شود. که می‌توان گفت، فاز هندسی توصیف چرخش یک کمیت فیزیکی مثل جهت‌گیری گربه یا فاز حالت کوانتومی ناشی از منحنی هندسی فضایی فیزیکی است. این فاز اولین بار توسط پانچاراتنام<sup>2</sup> در اپتیک برای مطالعه تداخل نوری معرفی شد. پس از آن بری<sup>3</sup> نشان داد که یک سیستم ناهمگن در حالت خالص تحت تحول بی‌دررو، ناشی از ساختار هندسی فضای پارامترها یک فاز هندسی می‌دهد. از آن پس فاز هندسی، خارج از چارچوب بری تعمیم یافت و ویلزیک<sup>4</sup> در همان تحول بی‌دررو نشان داد که حالت‌های انرژی تبهگن مقدار فاز هندسی را می‌دهند. بعد از آن آناندان و آهارانوف<sup>5</sup> محدودیت تحول بی‌دررو را در فاز بری نشان دادند و در زمینه بی‌دررو و غیرچرخه‌ای فاز هندسی را فرمول‌بندی کردند. ساموئل و بانداري<sup>6</sup> فاز هندسی را برای مسیرهای باز در تحول غیرچرخه‌ای حالت خالص در زمینه فضای حالت محاسبه کردند.

بعد از این نتایج فاز هندسی حالت خالص به حالت مخلوط تعمیم داده شد. در سیستم‌های دو جزئی درهم‌تنیده فاز هندسی حالت مخلوط زیرسیستم متفاوت از حالت درهم‌تنیده است. سیمون و مکورا<sup>7</sup> فرمالیسم ریاضی را با در نظر گرفتن مسیر فاز بری در فضای حالت محاسبه کردند، در واقع مشاهده کردند که فاز هندسی به صورت هولونومی قابل فرمول‌بندی

---

1 -Geometric phase

2 -Pancharatnam

3 -Berry

4 -Wilczek

5- Aharonov-Anandan

6 -Samuel-Bhandari

7 -Simon-Makunda

است و این نتیجه، ماهیت فاز هندسی را نشان می‌دهد. اخیراً اهلمن<sup>۸</sup> فاز هندسی را برای حالت مخلوط کوانتال تحت تحول یکانی تعمیم داده و در چارچوب ریاضی ریخته است. به تازگی توسط اسکویست<sup>۹</sup> با استفاده از ایده‌ی تداخل فاز هندسی عملگرهای غیرتبهگن در حالت مخلوط معرفی شده است. سینگ و همکاران<sup>۱۰</sup> رویکردی از فاز هندسی حالت مخلوط را شرح دادند. محاسبات کوانتومی بر اساس فاز هندسی آبلی و غیر آبلی<sup>۱۱</sup> پیشنهاد شده است. از فاز هندسی برای ارزیابی محاسبات کوانتومی استفاده می‌کنند. شرایط انتقال موازی<sup>۱۲</sup> باعث ایجاد اثرات فاز کلی برای سیستم‌های درهم‌تنیده<sup>۱۳</sup> می‌شود. اکنون فاز هندسی حالت‌های درهم‌تنیده که در محاسبات کوانتومی هولونومیک کاربرد دارد مورد توجه است. حال باید ببینیم که درهم‌تنیدگی چگونه روی فاز هندسی تأثیر می‌گذارد.

حالت همدوس در مکانیک کوانتومی نوع خاصی از حالت کوانتومی و نزدیک‌ترین حالت به کلاسیک است که دینامیک آن تقریباً به رفتار یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی شباهت دارد که یکی از پرکاربردترین ابزارها در کوانتوم است. از برهم‌نهی حالات همدوس خواص غیرکلاسیکی حاصل می‌شود و این خاصیت باعث نشان دادن ویژگی‌های غیرکلاسیکی در میدان تابشی می‌شود. این خاصیت غیرکلاسیکی بودن برای داشتن همبستگی بین اجزای سیستم ضروری است، به همین علت حالات همدوس<sup>۱۴</sup> درهم‌تنیده منابع مهمی برای محاسبات کوانتومی هستند.

مطالعه‌ی فاز هندسی از دو یا بیشتر درجه‌ی آزادی کوانتومی باعث کشف درهم‌تنیدگی

ناشی از فازهای توپولوژیک شده است.

---

8- Uhlmann

9- Sjövist

10- Singh et al

11- Abelian-nonabelian

12- parallel transport

13- entanglement

14- coherent states

یکی از ویژگی‌های متمایز کوانتوم نسبت به کلاسیک برهم‌نهی حالات همدوس فیزیکی مجزا است و به دلیل خطی بودن کوانتوم، معادله شرودینگر یک جواب قابل قبول دارد. درهم‌تنیدگی یک ویژگی حائز اهمیت مکانیک کوانتومی است که هیچ همتای کلاسیکی ندارد. نظریه حالات همدوس با پیدایش مکانیک کوانتومی و مطالعه‌ی نوسانگرهای هارمونیک توسط شرودینگر<sup>۱۵</sup> در سال 1926 مطرح شد و سپس با آثار گلوبر و کلادر و سودارشان<sup>۱۶</sup> در اپتیک کوانتومی معرفی شد. آثار و مفهوم درهم‌تنیدگی زمانی که مکانیک کوانتومی در مراحل اولیه توسعه بود، بیان شدند. پیشگامان بحث فاز هندسی برای حالات همدوس چترودی و همکارانش<sup>۱۷</sup> بودند.

اخیراً به دلیل توسعه مکانیک کوانتومی علاقه به بحث در مورد درهم‌تنیدگی بیشتر شده است. یکی از مباحث مهم در محاسبات و اطلاعات کوانتومی وجود همبستگی‌های کوانتومی است و همچنین معیاری از وجود همبستگی کوانتومی، درهم‌تنیدگی می‌باشد. سیستم‌های کوانتومی درهم‌تنیده همبستگی‌هایی را که نمی‌توان براساس کلاسیک توضیح داد به صورت اثر غیر کلاسیکی توضیح می‌دهند، هم چنین درهم‌تنیدگی محاسبات کوانتومی را در پروتکل‌های کوانتومی مانند مخابرات، کدگذاری کوانتومی و غیره سرعت می‌بخشد.

در کلاسیک میدان الکترومغناطیسی را به راحتی با فاز و دامنه نشان می‌دهیم ولی در کوانتوم این فاز و دامنه دارای عدم قطعیت هستند، زمانی که این عدم قطعیت به کمترین میزان خود برسد حالات همدوس ایجاد می‌شوند. یک روش بر پایه‌ی حالات همدوس دینامیک کوانتومی، به صورت روش نوسانگر جفت شده<sup>۱۸</sup> توسعه داده شد. این روش برای حل بسیاری از مسائل موفقیت‌آمیز بود.

---

15- Schrödinger

16- Glauber- Klauder- Sudarshan

17- Chaturvedi et al

18- coupled harmonic interaction

از طرفی دستگاه نوسانگر هارمونیک نقش مهمی در بسیاری از زمینه‌های فیزیکی دارد و مشکلات زیادی با استفاده از مدل نوسانگر جفت شده کاهش پیدا کرده است. مدل لی در نظریه کوانتومی و تبدیلات بوگولیوبوف<sup>۱۹</sup> در ابررسانایی بایستی مبنی بر نوسانگر جفت شده باشد. هم‌چنین نوسانگر جفت شده‌ی هارمونیک، اساس ریاضیات را برای حالات فشرده دو مدی در اپتیک تشکیل داده‌اند.

برخی از مسائل فیزیک از جمله اندازه‌گیری کوانتومی و گرانش که شامل تعامل یک سیستم کوانتومی و یک محیط کلاسیک می‌باشند، با مدل نوسانگر جفت شده هارمونیک ارائه می‌شوند. گفتیم حالات همدوس به دلیل اینکه نزدیک‌ترین حالات کوانتومی به کلاسیک هستند حائز اهمیت می‌باشند و با اینکه بسیاری از مسائل با حضور گروه‌های دینامیکی و متقارن حل می‌شود، در نظریه گروه مکانیک کوانتومی نقش مهمی دارند.

حالات همدوس نوسانگر هارمونیک وابسته به گروه هایزنبرگ-ویل<sup>۲۰</sup> است. اخیراً درهم‌تنیدگی در حالات فشرده دو مدی در شرایط گاوسی متقارن فرمول‌بندی شده است. این در حالی است که، ما حالات گاوسی متقارن را می‌توانیم با استفاده از نوسانگر جفت شده بسازیم. باید توجه داشته باشیم که نوسانگرهای هارمونیک نقش مهمی در درهم‌تنیدگی دارند. مسئله درهم‌تنیدگی در حالات فشرده دو مدی را می‌توان به نوسانگرهای هارمونیک جفت شده که به عنوان یک الگوریتم معادله درجه دوم دو متغیره است، فرمول‌بندی کرد. قطری-ساز، به شکل درجه دوم توسط چرخش دستگاه مختصات است، این درحالی است که قطری‌سازی نیازمند تبدیلات پیچیده مختصات است. به همین دلیل تحولات لورنتس در شش بعد، سه بعد فضایی و سه بعد زمانی پیدا شد.

---

19- bogoliubov

20- Heisenberg-weyl

## 1-1- فاز هندسی و محاسبات کوانتومی توپولوژیک

در اینجا با استفاده از محاسبات کوانتومی<sup>۲۱</sup> ماهیت فاز هندسی را در مکانیک کوانتومی بررسی می‌کنیم. یکی از کاربردهای فاز هندسی در محاسبات کوانتومی، به دلیل تحولات هندسی است.

در این بخش:

1. اصول اولیه و اساسی فاز هندسی و اهمیت آن در کوانتوم را بررسی می‌کنیم.
2. نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از اثرات هندسی، یک محاسبه کوانتومی در فازهای کوانتومی ظاهر می‌شود.
- همچنین مفهوم فاز هندسی را برای پیمانه‌های یکسان بررسی می‌کنیم و در مورد شباهت کلاسیکی فاز هندسی بحث می‌کنیم.
3. برخی از مفاهیم اساسی در محاسبات کوانتومی را بررسی می‌کنیم و این سوال پیش می‌آید که چرا فاز هندسی می‌تواند هر محاسبه‌ی کوانتومی را انجام دهد.
4. می‌بینیم که هر محاسبه‌ی کوانتومی می‌تواند با استفاده از فازهای کاملاً خالص هندسی (توپولوژیکی<sup>۲۲</sup>) انجام شود.

## 1-2- فاز هندسی

می‌دانیم که به ازای هر حالت فیزیکی، یک بردار در فضای هیلبرت وجود دارد. حالت‌های کوانتومی یک فضای برداری پیچیده را نشان می‌دهند که این بردارها نشان‌دهنده‌ی یک فاز هستند. ما نوسان‌های بین دو حالت کوانتومی را که احتمال نام دارد، به عنوان نهاد اساسی در نظر می‌گیریم و می‌توانیم آن را به روش تجربی مشاهده کنیم.

---

21- Quantum computation  
22- topological

دو حالت  $|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle$  را در نظر می‌گیریم، از تداخل آنها احتمال به صورت  $|\langle\psi_i|\psi_f\rangle|^2$  به دست می‌آید. حال اگر ما فاز نسبی<sup>۲۳</sup> بین دو حالت را بدانیم چه اتفاقی می‌افتد؟ یک روش، نگاه به نوسان بین دو حالت در تجزیه‌ی مقارن است:

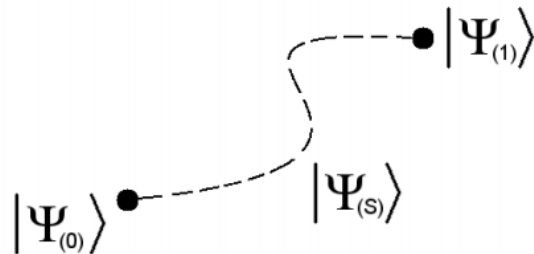
$$\langle\psi_i|\psi_f\rangle = re^{i\theta_f} \quad (1-1)$$

حال دو حالت با فاز نسبی دلخواه داریم:

$$\begin{cases} e^{i\alpha}|\psi_i\rangle \\ e^{i\beta}|\psi_f\rangle \end{cases} \rightarrow \Delta\theta = \alpha - \beta \quad (1-2)$$

$\Delta\theta$  فاز نسبی دلخواه و همچنین فاز وابسته به پیمانه است.

اگر  $|\psi_s\rangle$  حالت کلی باشد، به ازای  $s=0$  حالت  $|\psi_i\rangle$  و به ازای  $s=1$  حالت  $|\psi_f\rangle$  را داریم. زمانی که از  $i$  به  $f$  می‌رویم، تداخل سازنده است (ودرال<sup>۲۴</sup>، 2008).



شکل 1-1: چگونه می‌توانیم فاز دو حالت مختلف را زمانی که احتمال بین حالات، تنها از روی مقدار آزمایش در مکانیک کوانتومی مشخص شده است، مقایسه کنیم (ودرال، 2008)؟

## 1-2-1 انتقال موازی

در هندسه انتقال موازی، یک راه جابجایی یا انتقال اطلاعات هندسی در امتداد منحنی‌های

چندگانه است.

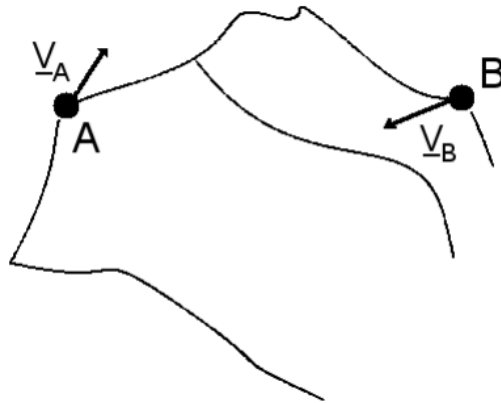
23- relative phase

24- vedral



فرض کنید یک منحنی داریم که یک بردار از نقطه  $A$  و بردار دیگری از نقطه  $B$  رسم

شده است. (در مکانیک کوانتوم فازها را به صورت بردار تصور می‌کنیم.)



شکل 1-2: مقایسه‌ی جهت دو بردار در دو نقطه‌ی مختلف، یک مسئله‌ی غیر بدیهی در یک منحنی چندگانه است. ما باید به گونه‌ای بردارها را انتقال دهیم که به همان نقطه برسیم و سپس زاویه‌ی بین آنها را اندازه‌گیری می‌کنیم. در غیر این صورت، مقایسه‌ی دو بردار در نقاط مختلف دشوار است (ودرال، 2008).

زاویه بین دو بردار را مقایسه می‌کنیم. اکنون سؤال این است که چگونه زاویه بین دو

بردار را وقتی که در مکان‌های مختلف قرار دارند بررسی کنیم؟

راه ساده این است که یکی از بردارها را جابجا کنیم و کنار بردار دیگری قرار دهیم، در

این صورت زاویه به راحتی اندازه‌گیری می‌شود (همان فاصله زاویه‌ای بین بردارها). اما ما

نمی‌خواهیم جابجایی را با زاویه‌ی اضافی نشان دهیم، پس مستقیم‌ترین مسیر را به عنوان یک

ژئودوزیک<sup>۲۵</sup> انتخاب می‌کنیم که تحول در این مسیر به عنوان انتقال موازی شناخته شده است.

برای تعریف انتقال موازی، با یک تبدیل کوچک از  $|\psi(s)\rangle$  به  $|\psi(s+ds)\rangle$  می‌رویم.

(3-1)

$$\arg\{\langle\psi(s)|\psi(s+ds)\rangle\} = 0$$

(1-4)

$$\text{Im}\{\langle\psi(s)|\psi(s+ds)\rangle\} = \text{Im}\left\{\langle\psi(s)\left|\frac{d}{ds}\right|\psi(s+ds)\rangle\right\} = 0$$

شرط انتقال موازی را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

(1-5)

$$\langle\psi(s)|d|\psi(s)\rangle = 0$$

اگر معادله (1-5) برقرار باشد انتقال موازی فازها را داریم. این تعریفها برای فاز نسبی

بودند که از انتقال موازی تعریف می‌شود. در این جا پیمانۀ ثابت نیست. حالا اگر به جای

حالت  $|\psi(s)\rangle$ ، ما از رابطه  $|\psi(s)\rangle = e^{i\alpha(s)}|\psi(s)\rangle$  استفاده کنیم، آنگاه انتقال موازی از رابطه-

ی زیر به دست می‌آید:

(6-1)

$$\langle\psi(s)|d|\psi(s)\rangle = \langle\psi(s)|d|\psi(s)\rangle + i \frac{d\alpha}{ds} ds$$

رابطه‌ی زیر فازهندسی ناشی از انتقال موازی است.

$$\gamma = \int_i^f \langle\psi(s)\left|\frac{d}{ds}\right|\psi(s)\rangle ds \quad (7-1)$$

در اینجا پیمانۀها ثابت هستند.

ما بین دو نقطه‌ی بی‌نهایت کوچک، به فاز مختلف نیاز داریم. فضای زیرین منحنی

و خمیدگی اختلاف فاز را نشان می‌دهد، در واقع انحنا برابر با یک اختلاف فاز است. (تا یک

ضریب ثابت)

پس وقتی یک مقدار بی‌نهایت کوچک به صفر می‌رسد در حالی که انتگرال بسته نیست،

به این مقدار، مقدار غیرانتگرالی گفته می‌شود. بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت فاز

هندسی جلوه عوامل فاز غیرانتگرالی در کوانتوم است.

حالا یک سیستم با اسپین  $\frac{1}{2}$  در نظر می‌گیریم.

## 2-2-1- کره بلوخ<sup>۲۶</sup>:

می‌دانیم کیوبیت ساده‌ترین سیستم کوانتومی است که فضای هیلبرتش دو بعدی است.

حالت خالص کیوبیت ←  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

$|0\rangle, |1\rangle$  بردارهای پایه هستند. کره بلوخ یک نمایش هندسی از یک حالت کوانتومی

کیوبیت (دو حالته) است. کلی‌ترین حالت کیوبیت را با ماتریس چگالی  $2 \otimes 2$  نشان می‌دهیم.

در حالت کلی برای کره بلوخ داریم:

$$\rho = \frac{1}{2} \left( I + \sum_i S_i \sigma_i \right) \quad (1-8)$$

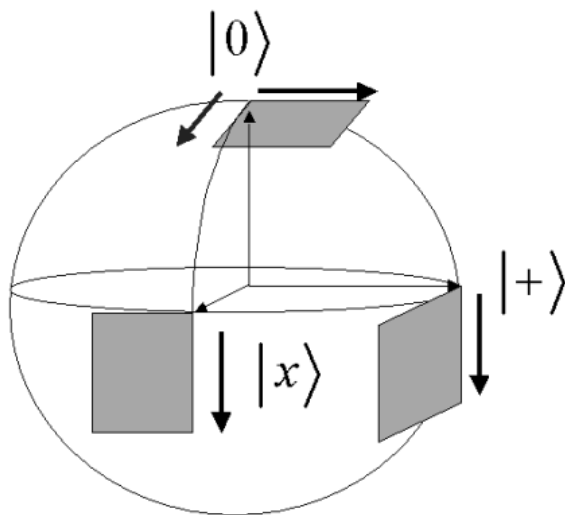
$\sigma_i$  ماتریس پائولی<sup>۲۷</sup>،  $S_i = \text{tr} \sigma_i \rho$ ،  $x, y, z, S_i$  مختصات روی کره هستند.

اگر  $S_x + S_y + S_z = 1$  حالت خالص<sup>۲۸</sup> باشد، معادل با کره‌ای با شعاع 1 است که می‌دانیم

نقاط روی سطح کره حالت خالص را نشان می‌دهد.

---

26- Bloch sphere  
27- Pauli spin matrix  
28- Pure state



شکل 3-1: کره بلوخ

انتقال فاز در کره بلوخ: این تبدیل را می‌توانیم در روش‌های مختلف انجام دهیم، یکی از این روش‌ها استفاده از معادله‌ی شرودینگر بی‌دررو است. طبق شکل ابتدا بردار فاز در قطب شمال قرار دارد پس از آن به خط استوا می‌رود و روی خط استوا با زاویه 90 درجه می‌چرخد و شروع به حرکت می‌کند و دوباره به قطب شمال بر می‌گردد. بردار نهایی نسبت به بردار اولی یک زاویه 90 درجه ایجاد می‌کند (ودرال، 2008).

یعنی:

$$|0\rangle \rightarrow |+ \rangle = |0\rangle + |1\rangle \rightarrow |x\rangle = |0\rangle + i|1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

فازهندسی چگونه تعیین می‌شود؟ به این صورت که ما یک بردار روی کره (قطب

شمال) به هر جهتی می‌کشیم که مماس با کره باشد در نهایت به همان روشی که در شکل

(3-1) توضیح دادیم زاویه بین بردار اولی و نهایی 90 درجه است.

بنابراین دو حالت  $|0\rangle, |1\rangle$  به روش زیر تحول پیدا می‌کند:

$$(1-9)$$

$$|0\rangle \rightarrow e^{+i\frac{\Omega}{2}} |0\rangle$$

$$(10-1)$$

$$|1\rangle \rightarrow e^{-i\frac{\Omega}{2}} |1\rangle$$

$\Omega$  زاویه فضایی نام دارد.

فاز را می توانیم از همان فرمول (1-7) محاسبه کنیم. این فرمول جالب (فرمول 1-11) متعلق به پانچاراتنام، اساس فرمول عمومی فاز هندسی برای حالت خالص است. ما با استفاده از این فرمول قادر به پیدا کردن فضای سطحی منحنی دو سیستم کوانتومی خواهیم بود.

(1-11)

$$\text{arg}\{\langle 0|+\rangle\langle +|x\rangle\langle x|0\rangle\}$$

انحنا چگونه مشخص می شود؟

اگر بخواهیم یک انحنا را در یک نقطه اندازه گیری کنیم، باید یک حلقه ی کوچک در اطراف نقطه بکشیم و بعد از تکمیل حلقه فاز اولیه و ثانویه را با هم مقایسه کنیم.

$$|\psi(s_i)\rangle \rightarrow |\psi(s_i + \delta s)\rangle \rightarrow |\psi(s_i + \delta s + \Delta s)\rangle \rightarrow |\psi(s_i)\rangle$$

آنگاه اختلاف فاز نهایی مطابق با فاز پانچاراتنام برابر است با:

$$\delta\theta = \text{arg}\{\langle \psi(s_i) | \psi(s_i + \delta s) \rangle \langle \psi(s_i + \delta s) | \psi(s_i + \delta s + \delta s') \rangle \langle \psi(s_i + \delta s + \delta s') | \psi(s_i) \rangle\}$$

$$= \text{arg}\{1 + i\left(\frac{\delta}{\delta s} \langle \psi(s_i) | \frac{\delta}{\delta s'} \psi(s_i) \rangle - \frac{\delta}{\delta s'} \langle \psi(s_i) | \frac{\delta}{\delta s} \psi(s_i) \rangle\right)\} \quad (12-1)$$

(13-1)

$$= \frac{\delta}{\delta s} \langle \psi(s_i) | \frac{\delta}{\delta s'} \psi(s_i) \rangle - \frac{\delta}{\delta s'} \langle \psi(s_i) | \frac{\delta}{\delta s} \psi(s_i) \rangle$$

برای تعریف انحنا می توان نوشت،  $\delta\theta = K \delta A$  که  $A$  منطقه محصور شده است. می-

دانیم برای ذرات با اسپین  $1/2$ ،  $\delta\theta = \delta K$ ، یعنی انحنا  $K = 1$  است.

برای هر کره می توان نوشت  $\frac{1}{r^2}$ ، اما برای کره بلوخ  $R=1$  (شعاع واحد) است.

درحالت های همدوس نوری خمیدگی و  $\delta\theta$  صفر است (ودرال، 2008).

### 1-2-3- انتقال موازی بی دررو:

فازهندسی کوانتومی در سال 1984 کشف شد. تابع موج یک سیستم  $\langle \psi(s(t), t) |$

تابعی از مجموعه‌ی پارامترها و زمان است. فرض می‌کنیم هامیلتونین تابع  $H = H(s(t))$  باشد. منظورمان از بی‌دررو<sup>۲۹</sup> یعنی فرایند آرام، پس می‌گوییم پارامترها خیلی آرام تغییر می‌کنند.

$$H(s(t))|\psi_n(s(t), t)\rangle = E_n(s(t))|\psi_n(s(t), t)\rangle \quad (14-1)$$

معادله شرودینگر برای یک سیستم به صورت زیر است:

$$(15-1)$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi_n(s(t), t)\rangle = H(s(t)) |\psi_n(s(t), t)\rangle$$

می‌خواهیم نشان دهیم که تحول بی‌دررو باعث انتقال فاز حالت کوانتومی می‌شود. معادله

شرودینگر را در  $\langle \psi_n |$  ضرب می‌کنیم تا ویژه مقادیر را به دست آوریم.

$$(16-1)$$

$$i \langle \psi_n | \frac{d}{dt} | \psi_n \rangle = E_n$$

این عبارت نشان می‌دهد که هر حالت از فاز دینامیکی به عنوان فاز هندسی تحول می‌-

یابد. حال یک تابع موج جدید با فاز دینامیکی تعریف می‌کنیم:

$$(17-1)$$

$$|\phi_n(s(t), t)\rangle := \exp\{iE_n(s(t))\} |\psi_n(s(t), t)\rangle$$

که معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند:

$$(1-18)$$

$$\langle \phi(s(t), t) | \frac{d}{dt} | \phi(s(t), t) \rangle = 0$$

این همان شرایط انتقال موازی است. بنابراین بخش هندسی فاز کوانتومی انتقال موازی است. حال این سؤال پیش می‌آید از اینکه حالت ما تحت معادله شرودینگر در تقریب بی‌دررو تحول می‌یابد، آیا می‌توانیم برای فاز هندسی فرمولی بنویسیم؟ جواب بله است، از طریق راه حل زیر:

(19-1)

$$|\phi_n(s(t), t)\rangle = e^{i\gamma(t)} |\phi_n(s(t))\rangle$$

به طوری که داریم:

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = -i \langle \phi(s(t)) | \frac{d}{ds} | \phi(s(t)) \rangle \frac{ds}{dt} \quad (20-1)$$

بنابراین داریم:

(21-1)

$$\beta = \frac{d}{ds} \gamma$$

که در این رابطه  $\beta = -i \langle \phi(s(t)) | \frac{d}{ds} | \phi(s(t)) \rangle$  است. در مسیر بسته  $\delta s$  برای فاز بری

داریم:

$$\gamma = \oint \beta \quad (22-1)$$

با استفاده از نظریه استوکس داریم:

(23-1)

$$\alpha = \int_S \sigma$$

که  $S$  ناحیه محصور شده توسط  $\delta s$  و  $\sigma$  است.

به طور کلی فاز کوانتومی یک سیستم کوانتومی، در یک تکامل کلی دو بخش است.

بخش داده‌های دینامیکی با استفاده از فرمول (24-1)

(24-1)

$$\delta = \int E(t) dt$$

و بخش هندسی با فرمول (25-1)

(25-1)

$$\gamma = \int \langle \psi(s) | \frac{d}{ds} | \psi(s) \rangle \frac{ds}{dt} dt$$

نشان داده می‌شود و فاز کل پس از جمع دو بخش،  $\phi = \delta + \gamma$  به دست می‌آید.

به منظور آشنا شدن بیشتر با مفهوم فاز هندسی شباهت آن را با پدیده کلاسیک بررسی

می‌کنیم.

## 4-2-1- فاز هندسی کلاسیک

در این بخش در مورد آونگ فوکو، فضانوردان و گربه‌ها صحبت شده است. این مثال-

های کلاسیک در رفتار عمومی خود فاز هندسی دارند. فرض می‌کنیم یک فضانورد در فضای

آزاد و ابتدا دور از سفینه‌ی خود قرار دارد. او می‌خواهد برای بازگشت به سفینه 180 درجه

بچرخد، اما چیزی در پیرامون او برای غلبه بر فشار یا نگاه‌داشتن چرخش او وجود ندارد،

همچنین تکانه زاویه‌ای او نیز صفر است، پس به نظر می‌رسد به برخی حرکات زاویه‌ای نیاز

داریم. این در حالی است که نیروی خارجی وجود ندارد و این غیر ممکن است (ودرال،

2008).

با این حال، هر کسی که تا به حال حرکت گربه را مشاهده کرده است، می‌داند که این

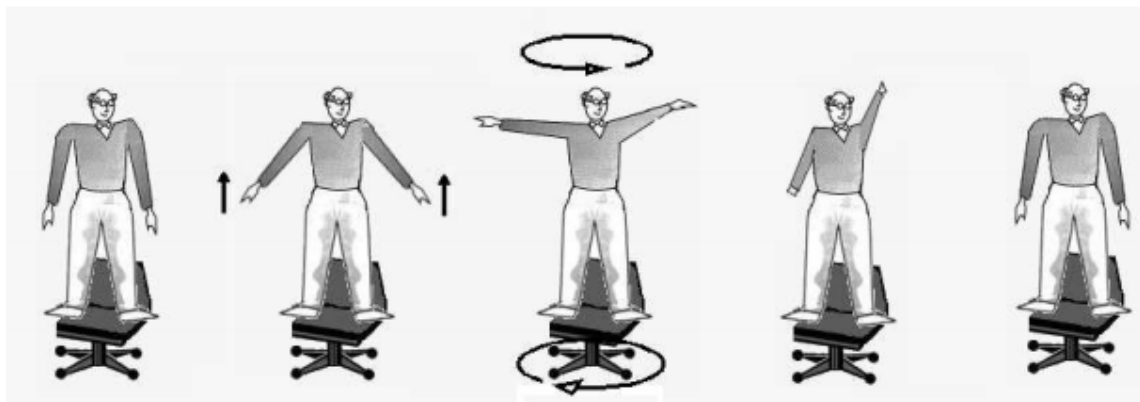
استدلال نادرست است. اگر یک گربه از ارتفاع خاصی بیافتد این سقوط به صورت وارونه

نیست، در حالی که گربه با پاهای خود به زمین می‌خورد. بنابراین ظاهراً چگونه گربه تکانه



زاویه‌ای را نقض می‌کند؟ می‌توان گفت، تکانه زاویه‌ای را نقض نمی‌کند، زیرا گربه‌ها از دینامیک چرخش استفاده نمی‌کنند بلکه از توپولوژیک استفاده می‌کنند.

شکل (1-4) نشان می‌دهد که چگونه فضانورد شبیه گربه می‌چرخد. حرکت دست شخص در شکل (1-4) همانند تحول اسپین  $1/2$  در کره‌ی بلوخ است. از این رو زاویه‌ای که توسط چرخش ایجاد شده است را می‌توان محاسبه کرد و شخصی که روی صندلی ایستاده در امتداد دست‌هایش می‌تواند با هر زاویه‌ای بچرخد.



شکل 1-4: یک فرد چرخان در حالی که روی صندلی با استفاده از یک اثر خالص هندسی ایستاده است در حالی که تکانه زاویه‌ای شخص صفر در نظر گرفته شده است. در مکان سوم، شخص دست خود را باز می‌کند در عین حال بدن او در جهت مخالف می‌چرخد و در مجموع تکانه زاویه‌ای صفر است. بنابراین با تکرار چرخه در شماری از زمان‌ها شخص می‌تواند چرخش روی صندلی را با هر زاویه دلخواه انجام دهد. این اثر همان چیزی است که توسط گربه برای چرخش در هوا و زمین استفاده شده است حتی زمانی که در ابتدا وارونه باشد (ودرال، 2008).

آونگ فوکو<sup>۳۰</sup> را هم می‌توانیم به همین روش هندسی بیان کنیم. می‌دانیم که آونگ فوکو در امتداد صفحه‌ای که به صورت تدریجی در طول روز به دلیل چرخش زمین می‌چرخد نوسان می‌کند و بر روی یک سری پین‌های احاطه‌کننده‌ی آونگ می‌کوبد.

تعداد پین‌های کوبیده شده یک سنجش مستقیم از کل جابجایی زاویه‌ای صفحه‌ی نوسان آونگ است (فازهندسی اکتسابی). این جابجایی به طور مستقیم مرتبط با محل آونگ روی

سطح زمین است، زیرا چرخش زمین باعث انتقال آونگ در امتداد یک مسیر بسته‌ی ویژه می‌شود (دایره عرض جغرافیایی آن)، این جابجایی وابسته به مسیر پیموده شده است و به سرعت چرخش زمین و یا فرکانس نوسان بستگی ندارد، مثل فاز بری که به مسیر حالت درونی یک سیستم کوانتومی وابسته است. آونگ بعد از یک چرخش ناشی از نوسان زمین دوباره به زاویه اصلی خود باز می‌گردد.

لاگرانژی برای این مسئله توسط فرمول زیر داده شده است:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt}\right) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - m\Omega \cos\theta\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \quad (26-1)$$

که در رابطه‌ی فوق  $\Omega$  فرکانس چرخش زمین ( $2\pi$  در روز)،  $m$  جرم آونگ و  $\omega$  فرکانس طبیعی نوسان است.

معادلات حرکت اوایلر-لاگرانژ به راحتی در مختصات  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$  (در حد بی‌دررو)

به دست می‌آید.

$$z(t) \approx x_0 e^{-i\Omega \cos\theta t} e^{-i\omega t} \quad (27-1)$$

این راه حل اجازه می‌دهد که هر دو فاز را در حرکت آونگ ببینیم: فاز دینامیکی  $\omega t$  که

همان فاز دینامیکی کوانتومی است و  $\Omega \cos\theta$  که فاز هندسی نام دارد. پس از یک روز دوران

کامل زمین فاز هندسی  $2\pi(1 - \cos\theta)$  می‌شود.

## 5-2-1- درک تجربی رابطه پانچاراتنام

ما تا اینجا به مقایسه‌ی فاز یک حالت کوانتومی در دو نقطه متفاوت پرداختیم. برای این

بخش، باید یک مسیر که دو نقطه را به هم متصل می‌کند نگاه کنیم و در طول مسیر یکی از

نقاط را تحول دهیم تا بر روی دیگری منطبق شود که از تداخل آنها فاز را نتیجه می‌گیریم.

حال چگونه تداخل این کار را انجام می دهد؟

یک تداخل سنج<sup>۳۱</sup> معمولی با جفت اشعه در فضای هیلبرت دوبعدی  $\mathbb{H}^2 = \{|\theta\rangle, |\varphi\rangle\}$  در نظر بگیرید. بردارهای حالت  $|\theta\rangle, |\varphi\rangle$  به عنوان بسته‌های موج در دو جهت، توسط تداخل هندسی ایجاد شده است.

$$U_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_B^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U(1) = \begin{pmatrix} e^{i\chi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28-1)$$

حالت خالص ورودی  $|\rho_{in}^0\rangle = |\theta\rangle\langle\theta|$  پس از تداخل به حالت خروجی زیر تبدیل می-

شود:

$$\begin{aligned} \rho_{out}^0 &= U_B^0 U_M^0 U(1) U_B^0 \rho_{in}^0 U_B^0 U_M^0 U_B^0 (1) U_M^0 U_B^0 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \chi & i \sin \chi \\ -i \sin \chi & 1 - \cos \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29-1)$$

پس با تغییر  $U(1)$ ، فاز  $\chi$  را می‌توانیم در سیگنال خروجی مشاهده کنیم. حاصل شدت

در امتداد  $|\theta\rangle$  به صورت  $I \propto 1 + \cos \chi$  است.

عملگر چگالی می‌تواند برای تداخل داخلی به صورت زیر ساخته شود:

$$\rho_0 \rightarrow U_i \rho_0 U_i^\dagger \quad (30-1)$$

$U_i$  یک تبدیل یکانی فعال، تنها روی درجه آزاد داخلی انجام می‌شود. فرض می‌کنیم

آینه‌ها و جفت اشعه‌ی حالت داخلی عوض نشده است، پس می‌توان  $U_B^0$  و  $U_M^0$  را به

ترتیب با  $U_M = U_M^0 \otimes 1_i$  و  $U_B = U_B^0 \otimes 1_i$ ، جایگذاری کنیم. عملگرهای

$U, U_M, U_B$  روی کل فضای هیلبرت  $\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}_i$  عمل می‌کنند.  $U$  مانند عملگر  $U_i$  در امتداد

مسیر  $|\varphi\rangle$  و  $U(1)$  فاز  $\chi$  در امتداد  $|\theta\rangle$  است.

حالا ما می‌خواهیم  $U$  را به حالت مخلوط تعمیم دهیم.

(31-1)

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes U_i + \begin{pmatrix} e^{i\chi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_i$$

حالت ورودی توسط ماتریس چگالی زیر داده شده است:

(32-1)

$$\tilde{n} = \rho_m \otimes \rho_0 = |\theta\rangle\langle\theta| \otimes \rho_0$$

طبق شکل،  $U$  بین دو شکاف اول و جفت آینه قرار دارد. حالت ورودی را به حالت

خروجی تبدیل می‌کنیم.

$$\tilde{n}_{out} = U_B U_M U U_B \tilde{n}_{in} U_B^\dagger U_M^\dagger U^\dagger U_B^\dagger \quad (33-1)$$

از جایگذاری معادلات (1-28) و (1-31) در معادله (1-33) رابطه‌ی زیر را به دست

می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{out} = & \frac{1}{4} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes U_i \rho_0 U_i^\dagger + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \rho_0 \right. \\ & + e^{i\chi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \rho_0 U_i^\dagger \\ & \left. + e^{-i\chi} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes U_i \rho_0 \right] \quad (34-1) \end{aligned}$$

شدت خروجی در امتداد  $|\theta\rangle$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I & \propto \text{Tr}(U_i \rho_0 U_i^\dagger + \rho_0 + e^{-i\chi} U_i \rho_0 + e^{i\chi} \rho_0 U_i^\dagger) \\ & \propto 1 + |\text{Tr}(U_i \rho_0)| \cos[\chi - \arg \text{Tr}(U_i \rho_0)] \quad (35-1) \end{aligned}$$

که ما از  $\text{Tr}(\rho_0 U_i^\dagger) = [\text{Tr}(U_i \rho_0)]^*$  استفاده می‌کنیم.

Family name: Karimi Dehkordi	Name: Niloofar
Title of Thesis: Investigation of geometrical phase in quantum information and computation theory	
Supervisor(s): Dr. Ghader Najarbashi	
Graduate Degree: <b>Master of Science</b>	
Major: physics	Specialty: Fundamental
University: <b>Mohaghegh Ardabili</b>	Faculty: Basic Sciences
Graduation date:	Number of pages: 125
<p>Abstract: The geometric phase is the comparison the of a physical quantity due to the changes on a closed curve in the system state space. These phases are experimentally measurable because of, that the space of a time dependent quantum system may be a curvature, therefore the Holonomy arises from this curvature. The Berry phase has three key features, which makes it very important. First, the Berry phase is gauge invariance. Especial functions are defined by a equal linear equation, hence it has a multiplicative gauge freedom in a general phase factor independent of the parameter. Berry phase (forget from on phase factor <math>2\pi</math>) with this phase factor remains unchanged provided that the special function is on a single loop value. This makes the Berry phase to be a physical quantity that is experimentally measurable by interference phenomena. Secondly, Berry phase is a geometric concept. that's mean it can be written as a linear integral of loop in parameter space, which does not depend on the rate of change on the loop. This property makes it measurable the Berry phase in terms of local geometric quantities in the parameter space. In fact, Berry showed that this phase can be written as a line integral (Berry curve) on the surface. Berry curve plays an essential role in effective dynamics with variables with degrees of slow release. Third, the Berry phase is similar to that of gauge field and differential geometry theory. This makes beauty, intuition and the same concept in physics.</p>	
Keywords: mixed states, Pancharatnam-Berry phase, pure states, quantum entanglement	



**University of Mohagheh Ardabili**

**Faculty of sciences**

**Department of physics**

**Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
M.Sc in Fundamental physics**

Title:

**Investigation Of Geometrical Phase In Quantum Information And  
Computation Theory**

Supervisor:

**Ghader Najarbashi(Ph.D)**

By:

**Niloofar Karimi Dehkordi**

**September– 2017**