دانشکده‌ی علوم

گروه آموزشی فیزیک

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی فیزیک گرایش بنیادی

عنوان:

دینامیک درهم‌تنیدگی در سیستم‌های کوانتمی باز با رفتار مارکوفی و غیر مارکوفی

استاد راهنما:

دکتر صدیف احدپور کلخوران

پژوهشگر:

ربابه عبدی صومعه

تابستان 1396

نام خانوادگی دانشجو: عبدی صومعه	نام: ربابه
عنوان پایان‌نامه: دینامیک درهم‌تنیدگی در سیستم‌های کوانتمی باز با رفتار مارکوفی و غیر مارکوفی	
استاد راهنما: دکتر صدیف احدپور کلخوران	
مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد**	رشته: فیزیک
گرایش: بنیادی	دانشگاه: **محقق اردبیلی**
دانشکده: علوم تاریخ دفاع: 1396/6/22	تعداد صفحات: 97

چکیده:

در حالت کلی سیستم‌های کوانتمی را می‌توان به دو دسته سیستم‌های کوانتمی بسته و سیستم‌های کوانتمی باز تقسیم بندی کرد. سیستم‌های کوانتمی باز نیز به دو دسته سیستم‌های مارکوفی (غیر حافظه دار) و سیستم‌های غیر مارکوفی (حافظه دار) تقسیم بندی می‌شوند. برای تمایز این دو رفتار از دینامیک درهم‌تنیدگی استفاده می‌کنیم که می‌تواند اطلاعات بسیاری را در مورد تحول یک سیستم بدهد. برگشت اطلاعات از محیط به سیستم را به منزله افزایش درهم‌تنیدگی در بازه‌های زمانی خاص می‌توان تعبیر کرد از این رو هرگاه در دینامیک درهم‌تنیدگی افزایش درهم‌تنیدگی مشاهده شد می‌توان به عنوان رفتار غیر مارکوفی و هرگاه کاهش یکنواخت درهم‌تنیدگی را داشته باشیم به منزله رفتار مارکوفی خواهد بود. برای مسائل خاص که ماتریس چگالی‌های خاص دارند باید بتوانیم درهم‌تنیدگی را در هر لحظه حساب کنیم. برای این منظور، از تلاقی که یک معیار برای درهم‌تنیدگی است استفاده خواهد شد. برای سیستم‌های کیوبیتی فرم تلاقی به صورت یک حالت بسته در می‌آید که درهم‌تنیدگی تشکیل نامیده می‌شود. محاسبات عددی در برنامه متلب یا فرترن نوشته شده و دینامیک درهم‌تنیدگی بر حسب زمان بدست خواهد آمد. سپس به تحلیل نمودارها پرداخته و نوع فرآیند مارکوفی و غیر مارکوفی تشخیص داده شده است. از منفیت که می‌تواند رفتار درهم‌تنیدگی را در زمان نشان دهد نیز استفاده شده است.

کلید واژه‌ها: 1- دینامیک درهم تنیدگی 2- رفتار غیر مارکوفی 3- رفتار مارکوفی

فهرست مطالب

شماره و عنوان مطالب **صفحه**

فصل اول: مقدمه

1-1- مقدمه 2

1-2- بررسی منابع 4

1-3- ماتریس چگالی 9

فصل دوم: معیارهای اندازه‌گیری درهم تنیدگی

2-1- درهم‌تنیدگی سامانه‌های کوانتمی 12

2-2- مفهوم درخم‌تنیدگی کوانتمی 13

2-3- معیارهای جداپذیری 14

2-3-1- تجزیه اشمیت 14

2-3-2- معیار ترانهاده پاره‌ای مثبت 16

2-4- معیارهای اندازه‌گیری درهم- تنیدگی 17

2-4-1- آنتروپی فون- نیومن 18

2-4-2- درهم‌تنیدگی
تشکیل..19
2-4-3-
تلاقی...19
2-4-4-
منفیت..21
2-4-5- حد پایین تلاقی برای سامانه‌های کوانتمی چند
قسمتی..22
2-4-6- درهم‌تنیدگی برای سه کیوبیتی-
ها...24

فصل سوم: سیستم‌های فیزیکی و انواع مدل‌های کوانتمی

3-1- مقدمه
....27
3-2- برهم‌کنش اتم- میدان در الگوی نیمه کلاسیک و هامیلتونی
سامانه...28
3-2-1- الگوی جفت شدگی
کمینال...28

فهرست مطالب

شماره و عنوان مطالب	**صفحه**

3-2-2- برهم‌کنش اتم-میدان در الگوی نیمه
کلاسیک...29
3-2-2-1- تقریب دو قطبی الکتریکی
ضعیف...31

3-2-3- برهمکنش دوقطبی-میدان الکتریکی..31
3-3- الگوی جینز-کامینگز کوانتمی..32
3-3-1- تقریب موج چرخان..35
3-3-2- جواب‌های الگوی جینز-کامینگز کوانتمی..36
3-4- بررسی تحولات حالت اولیه و رابطه محیط غیر مارکوفی..37
3-5- بررسی حالت مخلوط و رابطه محیط غیر مارکوفی..39
3-6- عامل خلوص و ناهمدوسی..41
3-7- تاثیر ثابت جفت‌شدگی..42
3-7-1- تاثیر ثابت جفت‌شدگی ضعیف..42
3-7-2- تاثیر ثابت جفت‌شدگی قوی..44
3-7-3- تاثیر بسامد قطع..45

فصل چهارم: دینامیک غیر مارکوفی در سیستم‌های فیزیکی

4-1- واپاشی خودبه خودی در سیستم‌های دو ترازه..48

4-1-1- معادله مستر
دقیق......48
4-1-2- مدل جینز-کامینگز در
تشدید......52
4-1-3- مدل جینز-کامینگز با تغییر
تنظیم......57
4-1-4- اواپاشی خودبخودی در گاف نواری
فوتونیک......59
4-2- نوسانات هارمونیک میرا
......60
4-2-1- بازبهنجارش فرکانس و
مدل......60
4-2-2- شرایط اولیه
عامل......61

فهرست مطالب

شماره و عنوان مطالب	صفحه

4-2-3- حالت
ساکن......65
4-2-4- شرایط اولیه غیر
عامل......66
4-2-5- نادیده گرفتن
ناهمگنی......70
4-3- سیستم اسپین-بوزون
......72

4-3-1- مدل
میکروسکوپیک.................... 72
4-3-2- واهلش حالت عامل
اولیه.................... 72
4-3-3- تعادل توابع
همبستگی.................... 75
4-3-4- گذار از حرکت همدوس به حرکت
ناهمدوس.................... 76

فصل پنجم: رفتار مارکوفی و غیر مارکوفی در سیستم‌های کوانتمی باز

با استفاده از دینامیک درهم‌تنیدگی

5-1-
مقدمه.................... 79
5-1-1- معادله مستر سیستم‌های
مارکوفی.................... 81
5-2- سیستم کیوبیتی (دو ترازه) و محیط کیوبیتی (دو
ترازه).................... 82
5-2-1- دینامیک درهم‌تنیدگی با استفاده از درهم‌تنیدگی
تشکیل.................... 82
5-2-2- دینامیک درهم‌تنیدگی با استفاده از اطلاعات قابل دسترس و
تلاقی.................... 89
5-3- برنامه متلب مورد استفاده برای دینامیک در هم
تنیدگی.................... 91
5-3-1- محاسبه دینامیک درهم‌تنیدگی با استفاده از تلاقی و اطلاعات قابل
دسترس.................... 91

5-3-2- دینامیک درهم‌تنیدگی با استفاده از درهم‌تنیدگی تشکیل با حالات اولیه $(|11\rangle + |00\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle +$
$|10\rangle)$ 93

5-3-3- محاسبه آهنگ
واپاشی 94

فهرست منابع و
ماخذ 95

فهرست شکل‌ها

شماره و عنوان شکل	**صفحه**

شکل 3-1: نمایش تقریب مارکوفی برای ثابت جفت‌شدگی ضعیف در تک کیوبیت 43

شکل 3-2: نمایش تقریب غیرمارکوفی برای ثابت جفت‌شدگی ضعیف در تک کیوبیت 43

شکل 3-3: نمایش تقریب مارکوفی و غیرمارکوفی برای ثابت جفت‌شدگی قوی در تک کیوبیت 44

شکل 3-4: نمایش تقریب مارکوفی و غیرمارکوفی برای تأثیر بسامد قطع در تک کیوبیت 45

شکل 4-1: شرح توصیف مدل جینز-کامینگز میرا 52

شکل 4-2: مدل جینز-کامینگز میرا در محیط برای روش‌های مختلف. حل دقیق و معادله مستر مرتبه 2 (TCL2) و 4 (TCL4) و معادله مستر عمومی بر حسب مرتبه زمان (GME2) و معادله مستر کوانتمی

مارکوفی (Markov)
54...

شکل 4-3: مدل جینز-کامینگز میرا در محیط. جمعیت برانگیخته برای دو شرط اولیه مختلف $\rho_{11}(0)=1,0$ در رژیم کوپل شدگی قوی $\tau_R = 0.2\tau_B$ 56

شکل 4-4: شکل 4-4: مدل جینز-کامینگز میرا با تغییر تنظیم حل دقیق (exact)، معادله مستر معادله مستر زمانی مرتبه 4 (TCL4) و معادله مستر مارکوفی (markovian)..58

شکل 4-5: واپاشی خودبخودی در گاف باند فوتونیک برای حل دقیق، معادله مستر کوانتمی و معادله مستر مرتبه 4...59

شکل 4-6: وابستگی زمانی فرکانس مشاهده‌پذیر فیزیکی $\omega_p(t)$ و ضرایب اتلافی $\lambda(t)$ در نوسانگر هارمونیک مرتبه 4 در کوپل شدگی قوی. پارامترها بصورت $\gamma = \omega_0$ و $\Omega = 20\omega_0$ می-باشد.............63

فهرست شکل‌ها

شماره و عنوان شکل	صفحه

شکل 4-7: وابستگی زمانی جمله پخش‌شدگی D_{PX} و D_{PP} مرتبه چهار در کوپل شدگی قوی. سه رژیم پارامتری دمای بالا، میانه و کوپل شدگی میانه جدا شده است..64

شکل 4-8: خطای نسبی دقیق $\hat{e}_r^{(2)}$ ، $\hat{e}_r^{(4)}$ و برآورد $e_r^{(2)}$ و $e_r^{(4)}$ بر حسب زمان و مرتبه 4 برای ضرایب $\lambda(t)$ ، $\omega_p(t)^2 - {\omega_0}^2$ ، $D_{PX}(t)$ و $D_{PP}(t)$ 64

شکل 4-9: رفتار دمای پایین در واریانس ایستا $\langle X^2 \rangle$ و $\langle P^2 \rangle$ برای $\gamma = 0.25\omega_0$ (بالایی) و برای $\gamma = 0.5\omega_0$ (پایینی)، TCL4 معادله مستر کوانتمی مرتبه 4 و exact معادله مستر دقیق می‌باشد ($\Omega = 20\omega_0$) 67

شکل 4-10: ناحیه فضای پارامترها، که خطای نسبی مقدار ایستا $\langle P^2 \rangle$ کمتر از 5 درصد (سمت چپ) و کمتر از 1 درصد (سمت راست). برای همه موارد $\Omega = 20\omega_0$ می-باشد........ 69

شکل 4-11: وابستگی زمانی بخش ناهمگن $I_{px}(t)$ (بالایی) و بخش واقعی تابع همبسته مکانی $\langle X_H(t)X \rangle$ (پایینی) برای دمای پایین و کوپل شدگی ضعیف بعبارت دیگر $k_\beta T = 1000\omega_0$ و $\gamma = \omega_0$ 70

شکل 4-12: ناحیه فضای پارامترها که خطای نسبی تابع همبستگی مکانی $\langle X \quad (t)X \rangle$ کمتر از 5 درصد و کمتر از 1 درصد (سمت راست). TCL2 و TCL4 حل معادله مستر زمانی مرتبه 2 و مرتبه 4 را نشان می-دهد. $\Omega = 200\omega_0$ می-باشد........ 70

شکل 4-13: تقریب تابع همبستگی $\langle P(t), X \rangle$ که شرخ داده می‌شود با صرف نظر کردن از غیر همگنی. پارامترها بصورت $\frac{k_\beta T}{\omega_0} = 0.01$، $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.1$ و $\Omega = 20\omega_0$ می-باشد........ 71

فهرست شکل‌ها

شماره و عنوان شکل	صفحه

شکل 4-14: وابستگی زمانی ضرایب $a_{yx}(t), a_{yy}(t)$ و ضرایب واهلش $a_{zz}(t), b_z(t)$ مرتبه 4 برای کوپل شدگی قوی در رژیم کوپل متوسط بعبارت دیگر $\frac{k_\beta T}{\omega_0} = 10$، $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.3$ و $\Omega = 20\omega_0$ می‌باشد........ 73

شکل 4-15: وابستگی دمایی اندازه ایستا $\langle \sigma_z \rangle_s$ برای کوپل‌شدگی قوی مختلف جمعیت حالت برانگیخته $\rho_{11} = \frac{1+\langle \sigma_z \rangle_s}{2}$........ 74

شکل 4-16: ناحیه فضای پارامترها که خطای نسبی $\hat{e}_r^{(2)}$ و $\hat{e}_r^{(4)}$ اندازه ایستا $\langle \sigma_z \rangle_s$. بالایی کمتر از 5 درصد و پایینی کمتر از 1 درصد است که $\Omega = 20\omega_0$ می‌باشد........ 75

شکل 4-17: قسمت حقیقی و موهومی تابع همبسته $\langle \sigma_x(t)\sigma_x \rangle$ در رژیم دمای پایین بعبارت دیگر $\frac{k_\beta T}{\omega_0} = 0.1$، $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.5$ و رژیم دمای بالا $\frac{k_\beta T}{\omega_0} = 50$، $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.2$. در هر دو مورد $\Omega = 20\omega_0$ می‌باشد........ 76

شکل 4-18: گذار از حالت همدوس به حالت غیر همدوس برای تقریب اختلالی بر حسب زمان و مرتبه 4. $\Omega = 20\omega_0$ می‌باشد........ 76

شکل 5-1: دینامیک درهم تنیدگی با استفاده از درهم‌تنیدگی تشکیل در رژیم $\frac{\lambda}{\gamma_0} = 0.1$ برای حالت اولیه الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$........ 88

شکل 5-2: دینامیک درهم تنیدگی با استفاده از درهم‌تنیدگی تشکیل در رژیم $\frac{\lambda}{\gamma_0} = 1$ برای حالت اولیه الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$........ 88

شکل 5-3: دینامیک درهم تنیدگی با استفاده از تلاقی (قرمز) و اطلاعات قابل دسترس (آبی) در رژیم $\frac{\lambda}{\gamma_0} = 0.1$ برای حالت اولیه الف) 2 = ω ب) 5 = ω 90

فهرست شکل‌ها

شماره و عنوان شکل	صفحه

شکل 5-4: دینامیک درهم تنیدگی با استفاده از تلاقی (قرمز) و اطلاعات قابل دسترس (آبی) در رژیم $\frac{\lambda}{\gamma_0} = 1$ برای حالت اولیه الف) 2 = ω ب) 5 = ω 90

شکل 5-5: دینامیک درهم تنیدگی با استفاده از تلاقی (قرمز) و اطلاعات قابل دسترس (آبی) در رژیم $\frac{\lambda}{\gamma_0} = 3$ برای حالت اولیه الف) 2 = ω ب) 5 = ω 90

فصل اول:

مقدمه

1-1- مقدمه

درهم‌تنیدگی کوانتمی[1] یکی از شگفت انگیزترین جنبه‌های مکانیک کوانتمی است که در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود معطوف ساخته است (Einstein etal, 1935). شرودینگر[2] درهم‌تنیدگی کوانتمی را "سرشت مکانیک کوانتمی" معرفی کرده است. این توجه به دلیل نقشی است که حالت‌های درهم‌تنیده در فرآیندهای اطلاع رسانی کوانتمی[3] همچون رمزنگاری کوانتمی[4]، کدگذاری فشرده[5]، دوربری کوانتمی[6]، محاسبات کوانتمی[7] و ارتباطات کوانتمی[8] ایفا می‌کنند. لذا تولید حالت‌های درهم تنیده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای بیان تعریف مناسبی از درهم‌تنیدگی باید دو مورد را در نظر داشت (Cunha, 2007): حالت سامانه و تقسیم این سامانه به زیر سامانه‌ها. هنگامی که فضای حالت سامانه بصورت حاصل ضرب تانسوری زیرسامانه‌ها در نظر گرفته می‌شود $H_A \otimes H_B$ ، مشاهده‌پذیرهای $A \otimes I$ و $I \otimes B$ موضعی خواهند بود. حالت‌هایی به شکل $\rho_A \otimes \rho_B$ نشان دهنده این هستند که بین دو زیر سامانه همبستگی وجود ندارد. به این معنی که مشاهده پذیرهای موضعی بطور موضعی بطور آماری مستقل هستند. حالت هایی به شکل

$$\rho = \sum_i P_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi} \tag{1-1}$$

که در آن، P_i ها توابع احتمال هستند، حالت‌های همبسته کلاسیک یا جداپذیر نامیده می‌شوند. نتایج اندازه‌گیری‌های مشاهده‌پذیرهای موضعی روی حالت‌های جداپذیر می‌تواند شدیداً همبسته باشند. یک مثال خوب در نماد گذاری اسپینی حالت $\rho_S = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|)$ است. اندازه‌گیری‌های مولفه Z اسپین در هر دو قسمت همبسته‌اند، اما این یک همبستگی کلاسیک است. اگر نتوان حالت دو قسمتی را بصورت معادله بالا نوشت، آن حالت را درهم‌تنیده می‌نامند. اخیرا کار قابل توجهی در مورد توصیف، تعیین کمیت و بررسی حالت‌های درهم تنیده مختلف صورت گرفته است (Horodecki etal, 2007).

1- quantum entanglement
2- shrodinger
3- quantum information
4- quantum cryptography
5- dense coding
6- quantum teleportation
7- quantum computation
8- quantum communication

الگوی جینز- کامینگز[1] (Phoenix and knight, 1991) که برهمکنش کوانتمی اتم دو ترازی با میدان تابشی را توصیف می‌کند به دلیل حل پذیر بودن در تقریب موج چرخان[2] از اهمیت ویژه‌ای در اپتیک کوانتمی برخوردار است. این الگو، دینامیک فوق العاده غنی و غیر بدیهی را ارائه می‌کند. از جنبه‌های قابل توجه این الگو وجود درهم‌تنیدگی کوانتمی اتم- میدان است و تاکنون نیز تلاش‌های زیادی در مطالعه درهم‌تنیدگی اتم- میدان صورت گرفته است (Rajagopal etal, 1999).

از طرفی همانطور که می‌دانیم هیچ سامانه فیزیکی را نمی‌توان بطور کامل از محیط اطرافش منزوی کرد و در عمل به دلیل جفت شدگی سامانه با محیط، پدیده واهمدوسی[3] اتفاق می‌افتد. این پدیده جدی‌ترین مانع در ساخت و بکارگیری حالت‌های درهم‌تنیده است و باعث بروز رفتار کلاسیک در سامانه‌های کوانتمی می‌شود. لازم به ذکر است که حالت‌های در همتنیده در تماس با محیط بسیار حساس عمل می‌کنند. در واقع برهمکنش بین یک سامانه کوانتمی و محیط اطرافش دو اثر برگشت ناپذیر در پی دارد که عبارتند از اتلاف[4] که باعث انتقال انرژی سامانه کوانتمی به محیط می‌شود و دیگری واهمدوسی است که به عنوان فرآیند جدی گذار از دنیای کوانتمی به دنیای کلاسیک به حساب می‌آید. اخیرا مطالعات زیادی برای بررسی اثر اتلاف و واهمدوسی بر الگوی جینز- کامینگز و تاثیر آن بر درهم‌تنیدگی اتم- میدان صورت گرفته است و مطالعه اثر مخرب واهمدوسی در حالت‌های درهمتنیده اهمیت قابل توجهی در زمینه‌های نظری و تجربی دارد. از اینرو حفظ و کنترل حالت‌های درهم تنیده برای بررسی اطلاعات کوانتمی موجود در سامانه‌های فیزیکی، ضروری است (Dur and briegel, 2004).

برای نشان دادن اثرات واهمدوسی بر حالت‌های درهم‌تنیده، نیاز به سنجه درهم‌تنیدگی مناسبی داریم که امکان بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی در فرآیندهای واهمدوسی را فراهم می‌سازد. ولی، سنجه دقیقی تحت شرایط عام برای درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته وجود ندارد. در واقع صرف نظر از مورد خاص سامانه‌های $2 \otimes 2$ که سنجه تلاقی ووترز برای سنجش میزان درهم‌تنیدگی آنها بکار می‌رود، ولی برای سامانه‌های با بعد بالاتر سنجه مناسبی تعریف نشده است (Wootters, 1998).

همدوسی از اصلی ترین موضاعات مکانیک کوانتمی است. همدوسی به حالت سامانه، ρ ، وابسته است، در یک پایه نمایش معین عناصر غیر قطری عملگر چگالی ρ ، که در برگیرنده اطلاعات فازی است، بیانگر همدوسی کوانتمی هستند. از اینرو آنها می‌توانند باعث بوجود آمدن الگوهای نوسانی شوند که نشان دهنده تداخل هستند. می‌توان نشان داد که وقتی یک حالت قطری است ابدا در هیچ پایه‌ای همدوسی ندارد. در ابعاد متناهی این موردی از حالت کاملا آمیخته $\rho_i = \frac{1}{d} I$ است، که در آن I عملگر یکانی و d بعد فضای

1- Jaynes-cummings model
2- rotating-wave approximation
3- decoherence
4- disspative

حالت است. از اینرو ρ_i می‌تواند حالت ناهمدوس نامیده شود. همانطور که گفته شد سامانه‌های کوانتمی منزوی نیستند. آنها بطور طبیعی با محیط برهمکنش می‌کنند و هنگامی که این برهمکنش در نظر گرفته شود معمولا فرآیند واهمدوسی اتفاق می‌افتد (Giulini, 1996). بدین ترتیب واهمدوسی می‌تواند به عنوان عامل از بین برنده جملات غیر قطری ماتریس چگالی ρ در نظر گرفته شود. همچنین در عمل به نظر می‌رسد که واهمدوسی با از بین بردن جملات تداخلی مانند پلی از دنیای کوانتمی به دنیای کلاسیک است.

در حالت کلی سیستم‌های کوانتمی را می‌توان به دو دسته سیستم‌های کوانتمی بسته و سیستم‌های کوانتمی باز تقسیم بندی کرد. سیستم‌های کوانتمی باز نیز به دو دسته سیستم‌های مارکوفی (غیر حافظه دار) و سیستم‌های غیر مارکوفی (حافظه دار) تقسیم بندی می‌شوند. برای تمایز این دو رفتار از دینامیک درهم‌تنیدگی استفاده می‌کنیم که می‌تواند اطلاعات بسیاری را در مورد تحول یک سیستم بدهد. برگشت اطلاعات از محیط به سیستم را به منزله افزایش درهم‌تنیدگی در بازه‌های زمانی خاص می‌توان تعبیر کرد از این رو هرگاه در دینامیک درهم‌تنیدگی افزایش درهم‌تنیدگی مشاهده شد می‌توان به عنوان رفتار غیر مارکوفی و هرگاه کاهش یکنواخت درهم‌تنیدگی را داشته باشیم به منزله رفتار مارکوفی خواهد بود. برای مسائل خاص که ماتریس چگالی‌های خاص دارند باید بتوانیم درهم‌تنیدگی را در هر لحظه حساب کنیم. برای این منظور، از تلاقی که یک معیار برای درهم‌تنیدگی است استفاده خواهد شد. برای سیستم‌های کیوبیتی فرم تلاقی به صورت یک حالت بسته در می‌آید که درهم‌تنیدگی تشکیل نامیده می‌شود. محاسبات عددی در برنامه متلب یا فرترن نوشته شده و دینامیک درهم‌تنیدگی بر حسب زمان بدست خواهد آمد. سپس به تحلیل نمودارها پرداخته و نوع فرآیند مارکوفی و غیر مارکوفی تشخیص داده شده است. از منفیت که می‌تواند رفتار درهم‌تنیدگی را در زمان نشان دهد نیز استفاده شده است.

1-2- بررسی منابع

اخیرا نتایج جالبی در زمینه رفتار دینامیکی حالت درهم تنیده سامانه باز، بدست آمده است. بویژه اگر دو کیوبیت در معرض ذخیره سازهای اتلافگر طبیعی قرار بگیرند، درهم تنیدگی شان در یک زمان متناهی می‌تواند از بین رود، حتی وقتی همدوسی تنها بطور مجانبی از بین رود. این اثر مرگ ناگهانی درهم تنیدگی[1] نامیده می‌شود (Yu and Eberly, 2006).

پیکزتو[2] و همکارانش(Peixoto etal, 1999) الگوی جینز- کامینگز را در تقریب پاشنده برای یک کاواک اتلافی در دمای صفر مطالعه کردند و اثر اتلاف را بر در همتنیدگی اتم- میدان و همچنین واهمدوسی القا شده توسط کاواک را بررسی کردند. آنها نشان دادند که کاواک اثری بر خواص همدوسی میدان ندارد ولی با

1- Sudden death of entanglemant
2- Peixoto

وجود اینکه اتم مستقیما به کاواک جفت نشده است خواص همدوسی آن به شدت تحت تاثیر قرار می‌گیرد. در مرجع الگوی جینز- کامینگز در تقریب پاشنده در حالتی که مد میدان کاواک به یک ذخیره ساز چلانده (حساس به فاز) جفت شده مطالعه گردیده است و مشاهده شده است که برخلاف ذخیره سازهای گرمایی که همدوسی کوانتمی را خیلی سریع نابود می‌کنند، انبارهای حساس به فاز، زمان همدوسی حالت‌های برهم نهی مختلف را افزایش می‌دهند.

رندل[1] و همکارانش (Rendell and Rajagopal, 2003) حل دقیقی برای الگوی جینز- کامینگز با فاز میرا را در حالتی که اتم و میدان ابتدا در حالت آمیخته درهم‌تنیده هستند بدست آوردند. آنها همچنین با محاسبه حد پایین برای تلاقی ، خواص درهم‌تنیدگی سامانه را مطالعه کردند. اثر اتلاف بر درهم‌تنیدگی الگوی جینز- کامینگز دو فوتونی در اثر حضور اثر استارک در (Zhou etal, 2001) بررسی شده است. نویسندگان نشان داده اند که در حضور فرآیندهای دو فوتونی غیر خطی، خواص همدوسی میدان تحت تاثیر کاواک تغییر می‌کند و همچنین اتلاف بر درهم تنیدگی اتم-میدان اثر گذاشته و دامنه نوسانات آن را سرکوب می‌کند.

در مرجع (Li etal, 2004)، لی[2] و همکارانش درجه درهم‌تنیدگی دو اتم دو ترازی را در یک کاواک و در حضور یک میدان دمشی خارجی کلاسیک با استفاده از سنجه تلاقی محاسبه کردند و نشان دادند که اگر میدان دمشی در حالت چلانده باشد دو اتم می‌توانند درهم‌تنیده شوند. مطالعه درهم‌تنیدگی بین دو زیر سامانه در حضور محیط ارزش بسیاری دارد. در مرجع (Chumacov etal, 2000) تحول پاشندگی اتمی[3] در یک کاواک اتلافی رانشی مطالعه شده است. اثرات میدان رانشی کلاسیک بر میدان رانشی کوانتیده و خواص اتم در حضور اتلاف رانشی مطالعه شده است.

بینا[4] و همکارانش (Bina etal, 2008) یک حل کاملاً تحلیلی برای دو اتم دو ترازی رانده شده توسط یک میدان کلاسیک خارجی که با تک مد میدان کاواک اتلافی در شرایط بازآوایی جفت شده‌اند، ارائه کردند. آنها توانستند میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم را با استفاده از سنجه تلاقی بدست آورند و نشان دهند که درهم-تنیدگی اولیه اتم-اتم نمی‌تواند افزایش پیدا کند. همچنین آنها توانستند حل دقیقی برای سامانه‌های متشکل از تعداد N اتم دو ترازی رانده شده که با تک مد میدان کوانتمی درون کاواک جفت شده اند، ارائه کنند و نتایج تحلیلی برای واهمدوسی، خلوص، همبستگی‌های اتمی و میانگین تعداد فوتون‌های میدان کاواک

1- Rendell
2- Li
3- Atomic dispersive
4- Bina

بدست آورند و نشان دادند که می‌توان حالت‌های درهم تنیده چند قسمتی تولید کرد. آنها همچنین نشان دادند که همدوسی کوانتمی و خلوص سامانه کاهش پیدا می‌یابد. همچنین برای $N = 3,4$ نشان دادند که امکان تولید حالت‌های شبه گربه شرودینگر برای میدان کاواک در رژیم گذرا وجود دارد. در مرجع (Wang etal, 2008) حل دقیقی برای معادله اصلی دو کیوبیت که در ابتدا در هم‌تنیده هستند و با یک ذخیره ساز غیر مارکوفی جفت شده‌اند، بدون در نظر گرفتن تقریب بورن- مارکوف و تقریب موج چرخان ارائه شده است، نشان داده شده است که جملات موج پاد چرخان اثر چشمگیری بر رفتار واهمدوسی دارند. نتایج نشان می‌دهند که رفتار واهمدوسی دو کیوبیت در حضور ذخیره ساز مارکوفی وابسته به نسبت پهنای چگالی طیفی ذخیره ساز به بسامد گذار اتمی است، بطوریکه اگر نسبت پهنای چگالی طیفی ذخیره ساز به بسامد گذار اتمی بسیار کوچکتر از یک باشد تلاقی بطور نمایی به سمت صفر کاهش می‌یابد و نشان می‌دهند که بین حل دقیق معادله اصلی با در نظر گرفتن تقریب موج چرخان در هامیلتونی و بدون در نظر گرفتن تقریب موج چرخان در هامیلتونی تفاوت وجود دارد.

اثر اتلاف بر درهم تنیدگی N اتم دو ترازی یکسان که با یک کاواک اتلافی با تعداد N کاواک اتلافی برهم‌کنش دارند در مرجع (Li etal, 2008) بررسی شده است. همچنین تحول زمانی درهم‌تنیدگی اتم‌ها را در الگوی جینز-کامینگز و در حد رژیم پاشنده محاسبه کرده‌اند و نشان دادند که برای تعداد N اتم در یک کاواک، اثر اتلاف بر درهم تنیدگی اتم‌ها به حالت اولیه شان وابسته است. علاوه بر این، نشان داده شده است که برای اتم‌هایی که در یک کاواک قرار دارند، اگر اتم‌ها ابتدا در حالت اولیه W[1] یا حتی حالت‌های شبه W آماده شده باشند برای انهایی که در این حالت‌ها باقی بمانند مهم نیست که در ابتدا حالت کاواک چگونه آماده شده است، که این می‌تواند از فروافت درهم تنیدگی جلوگیری کند. اگر اتم‌ها ابتدا در حالت GHZ [2] آماده شده باشند، زمان حصول هماندهی نوسانگرها و دامنه نوسانگرها بطور نمایی با مقدار ثابتی فروافت می‌کند. وقتی اتم‌ها در تعداد N کاواک قرار بگیرند، اگر اتم‌ها ابتدا در حالت W آماده شده باشند، هماندهی بطور نمایی با مقدار ثابتی کاهش خواهد یافت. برای حالت GHZ، وقتی ثابت میرایی کاواک K کوچک است، هماندهی هم نابودی و هم باز آفرینش را نشان می‌دهد. وقتی K به اندازه کافی بزرگ است زمان بدست آوردن هماندهی نوسانگرها و دامنه نوسانگرها بطور نمایی کاهش می‌یابد. برای هر دو مورد ثابت میرایی K، درهم تنیدگی بین اتم‌ها به شدت قوی خواهند بود. همچنین نشان داده شده است که به استثنای موردی که اتم‌ها در یک کاواک قرار گرفته‌اند و ابتدا در حالت W فراهم شده باشند، حالت اولیه میدان کاواک‌ها بر درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها به شدت اثر می‌گذارد و همچنین با افزایش دامنه میدان، α ، درهم تنیدگی بین

1- Werner states
2- Greenberger-Horen-Zeilinger

اتم‌ها بطور نمایی با α^2 کاهش می‌یابد. برای موردی که اتم‌ها ابتدا در حالت GHZ باشند و در کاواک قرار بگیرند درهم تنیدگی بین اتم‌ها به شدت به تعداد N وابسته است و هماندهی بطور نمایی با N کاهش خواهد یافت. قابل ذکر است که بیشینه درهم تنیدگی با درهم تنیدگی مانا بین اتم‌ها برای حالت‌های اولیه که اتم‌ها در حالت GHZ در یک کاواک قرار دارند و با حالتی که اتم‌ها در حالت W در N کاواک قرار دارند (برای N های بزرگ) ، تقریباً به N وابسته نیست (Li etal, 2008). در مرجع (Cui etal, 2007) رفتار دینامیکی درهم‌تنیدگی بین دو اتم جداپذیر تحت تاثیر واهمدوسی بررسی شده است.

کاروالیو و همکارانش (Carvalho etal, 2004) دینامیک درهم تنیدگی چند جزئی محیط گوناگون شامل اتلاف، اختلال و وافازی حاصل از واهمدوسی را مطالعه کرده‌اند. آنها دریافتند که حالت‌های GHZ در اثر جفت شدگی با محیط بطور قابل توجهی نسبت به حالت‌های W شکننده هستند.

می‌توان مباحث بالا را که در مورد دینامیک درهم‌تنیدگی انواع سیستم‌های فیزیکی است را به فرآیندهای مارکوفی و غیر مارکوفی در سیستم‌های کوانتمی کشاند.

فرآیندهای مارکوفی و غیر مارکوفی در سیستم‌های باز پیشینه طولانی دارد اما برای اولین بار در سال 2007 در مقاله‌ای (Bellomo etal, 2007) دینامیک درهم‌تنیدگی وارد مسائل رفتارهای مارکوفی و غیر مارکوفی شد، بطوریکه این دینامیک توانست نوع رفتار مارکوفی و غیر مارکوفی را نشان دهد. آنها یک سیستم و محیط کیوبیت کیوبیت را در نظر گرفتند و به بررسی دینامیک درهمتنیدگی پرداختند. در زمانی که درهم‌تنیدگی همواره با افزایش زمان افت میکند را به منزله رفتار مارکوفی و هنگامی که بعد از افت، افزایش درهم‌تنیدگی را مشاهده کردند به آن نسبت رفتار غیر مارکوفی دادند. دینامیک درهم‌تنیدگی با استفاده از تلاقی ووترس بیان شده است.

در سال 2010، ریواس و همکاران در مقاله (Rivas etal, 2010) دیگری نشان دادند که رفتار سیستم‌ها چقدر غیر مارکوفی است اما همچنان مرز دقیق بین این و رفتار مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در سال 2012 دکتر رضا خانی و همکاران از دانشگاه صنعتی شریف (Alipour etal, 2012) بر مبنای مقاله‌ای (Shabani and Lidar, 2009) که در آن گفته شده بود:

$$\text{if} \quad \text{Discord} = 0 \underset{\text{شرط لازم و کافی}}{=>} \text{Map is CP} \qquad (1\text{-}2)$$

توانستند مرز دقیق بین این دو رفتار را تعیین کنند اما در مقاله‌ای که در سال 2013 (Brodutch etal, 2013) ارائه شد مثال نقضی آورده شد که در آن اثبات شد شرط لازم الزاماً برقرار نیست و موضوع همچنان مورد بحث باقی ماند.

در مقاله جامعی (Haseli etal, 2014) که در سال 2014 در مجله معتبری (Physical Review A) توسط کارپات و همکاران به چاپ رسید موضوع از کانال‌های مختلفی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در این مقاله اولین سنجه برای رفتار غیر مارکوفی بر پایه trace distance از مقاله (Breuer etal, 2009) معروف به سنجه BLP معرفی شده است. برای دو حالت دلخواه $\rho_1(t)$ و $\rho_2(t)$، trace distance بدین صورت معرفی می‌شود:

$$D\big(\rho_1(t),\rho_2(t)\big)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\rho_1(t)-\rho_2(t)) \tag{1-3}$$

که $|A|=\sqrt{A^{\dagger}A}$. اگر $\frac{dD(t)}{dt}>0$ باشد بدین معنی است که برگشت اطلاعات از محیط به سیستم را داریم و رفتار غیر مارکوفی مشاهده خواهد شد. سنجه BLP بدین صورت معرفی می‌شود:

$$\mathcal{N}_{BLP}(\Lambda)=\max_{\rho_1(0),\rho_2(0)}\int_{\left[\frac{dD(t)}{dt}\right]>0}\frac{dD(t)}{dt}\,dt \tag{1-4}$$

که ماکزیمم روی تمام حالت‌های ممکن با حالت اولیه $\rho_1(0)$ و $\rho_2(0)$ گرفته می‌شود. معادله فوق را همچنین می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\mathcal{N}_{BLP}(\Lambda)=\max_{\rho_{1}(0),\rho_{2}(0)}\sum_i[D(b_i)-D(a_i)] \tag{1-5}$$

که بازه زمانی (a_i,b_i) آنجایی است که در آن $\frac{dD(t)}{dt}>0$ می‌باشد. دومین سنجه‌ای که برای امر غیر مارکوفی معرفی شده است (Lu etal, 2012) در حوزه اتلاف کوانتمی می‌باشد که معروف به سنجه LFS بدین صورت می‌باشد:

$$\mathcal{N}_{LFS}(\Lambda)=\max_{\rho_{\mathcal{S}A}}\int_{\left(d/_{dt}\right)\tilde{I}>0}\frac{d}{dt}\tilde{I}dt \tag{1-6}$$

که I، mutual information سیستم SA (سیستم+آنسیلا) می‌باشد. ماکزیمم‌گیری روی تمامی حالت‌های اولیه انجام می‌پذیرد که در آن $\frac{d\check{I}}{dt} > 0$ می‌باشد. سنجه سوم با استفاده از اطلاعات قابل دسترس می‌باشد که در فصل پنجم به تفضیل در موردش صحبت خواهیم کرد.

در این رساله هدف مطالعه اثر اتلاف بخصوص بر درهم تنیدگی کوانتمی اتم- میدان در الگوی جینز- کامینگز است. با توجه به اینکه اصولاً اتلاف سامانه کوانتمی باعث افزایش آمیختگی حالت سامانه می‌شود، بنابراین اگر حالت اولیه سامانه اتم- میدان یک خالص انتخاب شود، سنجه‌های چون آنتروپی فون نیومن، ماتریس چگالی کاهش یافته یا آنتروپی خطی نمی‌توانند بخوبی میزان درهم تنیگی سامانه را بدست بدهند. به این منظور در این رساله سعی می‌شود که از سنجه تلاقی و منفیت ترانهاده پاره ای ماتریس چگالی سامانه اتم- میدان برای مطالعه دینامیک درهم تنیدگی اتم- میدان در حضور اتلاف استفاده شود. سپس در هر نقطه که درهم‌تنیدگی افزایش یافت را می‌توان به منزله رفتار مارکوفی و هر جا که کاهشی یکنواخت داشتیم به منزله رفتار مارکوفی مشخص خواهیم کرد.

1-3- ماتریس چگالی

در تمامی مواردی که سامانه‌ی کوانتومی جزئی از یک سامانه‌ی بزرگ‌تر است، حالت سامانه به وسیله‌ی یک ماتریس چگالی توصیف می‌شود. فرض کنید که یک سامانه از دو زیر سامانه‌ی A و B تشکیل شده باشد. بنابر اصول موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی فضای هیلبرت این سامانه‌ی دو جزئی، $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ است. چنانچه $\{|i\rangle\}_{i=1}^{M}$ پایه زیر فضای $\mathcal{H}_A$ و $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^{N}$ پایه زیر فضای $\mathcal{H}_B$ باشند آنگاه یک حالت کلی از سامانه AB توسط بردار حالت زیر توصیف شد $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i,\mu\rangle$. ماتریس چگالی توصیف کننده‌ی سامانه‌ی AB عبارت است از،

$$\rho_{AB}(t) = |\psi\rangle_{AB}\,{}_{AB}\langle\psi| = \sum_{i,j,\mu,v} \psi_{i\mu}\psi^*_{jv} |i,\mu\rangle\langle j,v| \tag{1-7}$$

و اثر هر عملگری مانند $\widehat{M}_A$ روی زیر سامانه‌ی A معادل است با اثر عملگر $\widehat{M}_A \otimes \hat{I}$ روی سامانه‌ی AB. در نتیجه خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\langle \widehat{M}_A \rangle = \langle\psi|\widehat{M}_A|\psi\rangle &= \mathrm{Tr}_{AB}\big((\widehat{M}_A \otimes \hat{I})|\psi\rangle\langle\psi|\big) \\ &= \mathrm{Tr}_A\Big(\mathrm{tr}_B\Big((\widehat{M}_A \otimes \hat{I})|\psi\rangle\langle\psi|\Big)\Big) = \mathrm{Tr}_A(\widehat{M}_A\,\rho_A)\end{aligned} \tag{1-8}$$

که در آن $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$ ماتریس چگالی زیر سامانه‌ی A نامیده می‌شود. به طریق مشابه ماتریس چگالی زیر سامانه‌ی B نیز با رابطه‌ی $\rho_B = \mathrm{Tr}_A(|\psi\rangle\langle\psi|)$ مشخص می‌شود که ماتریس چگالی به صورت

$\rho_A = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j|$ و $\rho_B = \sum_{\mu,v} \rho_{\mu v}|\mu\rangle\langle v|$ است. بنابراین می‌توان ویژه مقادیر و ویژه بردارهای آن را محاسبه کرد و این عملگر را بر حسب آن‌ها به صورت زیر بسط داد:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |i\rangle\langle i| \qquad (1\text{-}9)$$

در این رابطه λ_i ویژه مقدار iام و $|i\rangle$ ویژه بردار متناظر و N بعد فضای هیلبرت یا بعد ماتریس چگالی است. رابطه‌ی بالا را می‌توانیم چنین تفسیر کنیم که حالت $\hat{\rho}$ مخلوطی از حالت‌های $|i\rangle$ که هر کدام با ضریبی از λ_i است.

فصل دوم:

معیارهای اندازه‌گیری

درهم‌تنیدگی

1-2- درهم‌تنیدگی سامانه‌های کوانتومی

وجود درهم‌تنیدگی کوانتمی یا همبستگی کوانتمی در اطلاع رسانی کوانتمی باعث تمایز آن از اطلاع رسانی کلاسیک می‌شود. این همبستگی کوانتمی که بین حالت‌های درهم‌تنیده اتفاق می‌افتد همتای کلاسیک است. درهم‌تنیدگی کوانتمی در سال‌های اخیر به دلیل نقشی که در فرآیندهای اطلاع رسانی کوانتمی ایفا می‌کند توجه افراد بسیاری را به خود جلب کرده است.

نظریه‌ی درهم‌تنیدگی کوانتومی یا همان آمیختگی سامانه‌های کوانتومی یکی از مباحث اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی به شمار می‌رود. پدیده‌ی درهم‌تنیدگی سامانه‌های کوانتومی که به عنوان یک پدیده‌ی غیرکلاسیکی شناخته می‌شود، برای اولین بار در سال 1935 توسط اینشتن[1]، پودولسکی[2] و روزن[3] در مقاله‌ای که بعدها به مقاله‌ی EPR شهرت یافت، معرفی گردید (Enisein etal, 1935). بنیان‌گذاران این نظریه وجود چنین پدیده‌ای را دلیل بر نقص مکانیک کوانتومی دانستند و معتقد بودند که با استفاده از یک متغیر نهانی[4] می‌توان نظریه‌ی کامل‌تری را بوجود آورد. اما در سال1964، بل با ارائه‌ی یک نامساوی که به نامساوی بل[5] شهرت یافت نشان داد مفروضاتی که در مقاله‌ی EPR در نظر گرفته شده‌اند با مبانی مکانیک کوانتومی هم‌خوانی ندارند. بل نشان داد که وجود مدلی بر پایه‌ی متغیر نهانی مستلزم برقراری یک نامساوی است، درحالی‌که در مکانیک کوانتومی حالت‌هایی وجود دارند که به وضوح منجر به نقض این نامساوی می‌شوند. این پدیده توجه بسیاری را به خود جلب کرد، به طوری‌که امروزه نقش بسیار مهمی را در شاخه‌های مختلف نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی از قبیل: رمزنگاری، ارتباط و محاسبات کوانتومی ایفا می‌کند.

1- Einstein
2- Podolski
3- Rosen
4- Hidden variable
5- Bell inequality

یکی از شرط‌های مهم برای انتقال اطلاعات توسط سامانه‌های کوانتومی، در ارتباط بودن زیرسامانه‌هایی است که در سامانه مورد نظر وجود دارند. به زبان بسیار ساده، در ارتباط بودن زیرسامانه‌های یک سامانه با یکدیگر را آمیختگی یا درهم‌تنیدگی کوانتومی می‌نامند.

درهم‌تنیدگی کوانتومی از همبستگی کوانتومی بین زیرسامانه‌های جدا از هم بوجود می‌آید. در واقع، حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده به حالت‌هایی اطلاق می‌شوند که اجزاء تشکیل دهنده‌ی آن‌ها نتوانند مستقل از یکدیگر باشند و قرار گرفتن یکی از اجزاء در یک حالت خاص به جزء دیگر بستگی دارد. حال به بررسی درهم‌تنیدگی حالت‌های خالص و مخلوط می‌پردازیم. بنا به تعریف، اگر نتوان حالت خالص یک سامانه را به صورت ضرب تانسوری حالت خالص هر یک از زیرسامانه‌ها نوشت، حالت مفروض را درهم‌تنیده می‌نامند. برای مثال، حالت $|\psi\rangle_{AB} \neq |\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B$ درهم‌تنیده است. درحالت کلی، تمامی حالت‌های مخلوط درهم‌تنیده هستند، مگر حالت‌هایی که ماتریس چگالی آن‌ها به صورت ضرب تانسوری ماتریس چگالی زیرسامانه‌ها نوشته شده‌اند که به اینگونه سامانه‌ها، اصطلاحاً سامانه‌های تفکیک‌پذیر[1] می‌گویند،

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \qquad (2\text{-}1)$$

سامانه‌های تفکیک‌پذیر، سامانه‌هایی هستند که فقط همبستگی کلاسیکی دارند.

یکی از مباحث مهم در نظریه‌ی درهم‌تنیدگی، تعیین مقدار کمّی درهم‌تنیدگی یک حالت است. هر تابعی که مقدار کمّی درهم‌تنیدگی یک حالت کوانتومی را مشخص کند، به عنوان معیار درهم‌تنیدگی در نظر گرفته می‌شود. از مهم‌ترین این معیارها می‌توان به تلاقی برای سامانه‌های دو کیوبیتی و کران پایین تلاقی برای سامانه‌های سه کیوبیتی اشاره کرد.

2-2- مفهوم درهم‌تنیدگی کوانتمی

ابتدا تعریفی برای درهم‌تنیدگی ارائه می‌کنیم. سامانه کوانتمی S را که بوسیله بردار حالت $|\psi\rangle$ توصیف می‌شود در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم این سامانه مرکب از دو زیر سامانه S_1 و S_2 است (بنابراین S یک سامانه کوانتمی دو قسمتی نامیده می‌شود). بردار حالت $|\psi\rangle$ مربوط به سامانه S را نسبت به S_1 و S_2 درهم‌تنیده گوییم اگر نتوان آن‌را بصورت حاصلضرب تانسوری بردارهای حالت مربوط به این دو زیر سامانه نوشت، به بیان صریح اگر بردار حالت $|\psi\rangle_1$ مربوط به S_1 و بردار حالت $|\varphi\rangle_2$ مربوط به S_2 چنان وجود نداشته باشد که بتوان نوشت $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ آنگاه دو زیر سامانه S_1 و S_2 درهم‌تنیده هستند. اکنون به جای سامانه‌های درهم تنیده تعریفی مبتنی بر حالت‌های درهم تنیده ارائه می‌کنیم، حالت‌های دو زیر سامانه S_1 و S_2 را درهم‌تنیده گویند اگر حالت سامانه مرکب S نتواند بر حاصل

1- Separable

ضرب تانسوری به شکل $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ دلالت کند، که در آن، $|\psi\rangle_1$ و $|\varphi\rangle_2$ به ترتیب بردارهای حالت معینی از S_1 و S_2 هستند.

در طی دهه گذشته مطالعات گسترده‌ای در مورد درهم تنیدگی صورت گرفته است. درهم تنیدگی معمولاً از همبستگی‌های کوانتمی بین زیر سامانه‌های مجزا ناشی می‌شود که نمی‌توان آنرا بوسیله فرآیندهای موضعی بر روی هر زیرسامانه های مجزا ناشی می‌شود که نمی‌توان آنرا بوسیله فرآیندهای موضعی بر روی هر زیر سامانه بوجود آورد.

همانطور که در ابتدا بیان شد، یک حالت کوانتمی خالص مربوط به دو زیر سامانه یا بیشتر از دو زیر سامانه درهم تنیده است اگر نتوان آنرا بصورت حاصل ضربی هر یک از مولفه‌ها نوشت. از طرف دیگر حالت آمیخته دو قسمتی ρ درهم‌تنیده است اگر نتوان آنرا بصورت ترکیب محدبی از حالت‌های حاصلضربی نوشت. در غیر اینصورت، حالت مورد نظر جداپذیر یا همبسته کلاسیک است بنابراین حالت آمیخته دو قسمتی ρ جداپذیر است اگر بتوان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\rho = \sum_i \omega_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)} \qquad \omega_i \geq 0 \qquad \sum_i \omega_i = 1 \tag{2-2}$$

که در آن، $\rho_i^{(1)}$ و $\rho_i^{(2)}$ به ترتیب ماتریس‌های چگالی زیر سامانه‌های 1 و 2 را نشان می‌دهند. در غیر اینصورت حالت درهم تنیده است.

2-3- معیارهای جداپذیری

با وجود اینکه درهم‌تنیدگی در زمینه اطلاع رسانی کوانتمی نقش مهمی را ایفا می‌کند اما هنوز معیار کلی برای تشخیص جداپذیری حالت‌های کوانتمی ارائه نشده است. بیشتر معیارهایی که تاکنون معرفی شده‌اند تنها شرط لازم برای جداپذیری هستند و تعداد کمی از آنها شرط لازم و کافی برای جداپذیری ارائه می‌کنند.

2-3-1- تجزیه اشمیت

قضیه1: برای هر حالت خالص دوتایی $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$، می‌توان تجزیه اشمیت را بصورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle |f_i\rangle \tag{2-3}$$

که در آن $|f_i\rangle$ و $|e_i\rangle$ به ترتیب پایه‌های متعامد در فضای هیلبرت H_A و H_B با بعد M و N هستند و $\sum_i |a_i|^2 = 1$.

اثبات.

می‌توانیم حالت خالص دوتایی $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ را بصورت زیر نمایش دهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_j A_{ij} |i\rangle |j\rangle \quad (2\text{-}4)$$

اکنون تجزیه مقدار تکینه را برای A_{ij} می‌نویسیم: برای هر عملگری مانند A تجزیه مقدار تکینه بصورت $A=UA_dV^\dagger$ تعریف می‌شود، که در آن A یک ماتریس $M \times N$، U و V به ترتیب ماتریس‌های یکانی $M \times M$ و $N \times N$ و A_d یک ماتریس قطری است. بنابراین تجزیه مقدار تکینه برای A_{ij} عبارت است از:

$$A_{ij} = U_{ik}(a_k\delta_{kl})V_{jl}^* \quad (2\text{-}5)$$

برای بدست آوردن رابطه بالا از این نکته که $V_{lj}^\dagger = V_{jl}^*$ و همچنین $(A_d)_{kl} = a_k\delta_{kl}$ که در آن، a_k مثبت است، استفاده کرده‌ایم.

با قرار دادن مقدار تکینه A_{ij} در رابطه (2-4) عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$|\psi\rangle = \sum_k a_k|e_k\rangle |f_k\rangle \quad (2\text{-}6)$$

در تساوی آخر از این نکته استفاده کرده‌ایم که تبدیل یکانی یک پایه را به پایه دیگری تبدیل می‌کند، $|e_k\rangle = \sum_i u_{ik} |i\rangle$. بر حسب تعداد جملات بسط که عدد اشمیت نامیده می‌شود، می‌توان یک معیار جداپذیری برای حالت خالص دوتایی بصورت زیر تعریف کرد:

حالت $|\psi\rangle$ درهم تنیده می‌باشد اگر عدد اشمیت آن بزرگتر از یک باشد و در غیر این صورت جداپذیر است. بنابراین حالت خالص $|\psi\rangle$ یک حالت ضربی است اگر و تنها اگر عدد اشمیت آن برابر با یک باشد، که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle \quad (2\text{-}7)$$

که در آن، ماتریس چگالی کاهش یافته $\rho_A = |e_k\rangle \langle e_k|$ و $\rho_B = |f_i\rangle \langle f_i|$ خالص هستند. ولی ماتریس‌های چگالی کاهش یافته یک حالت خالص درهم تنیده، حالت‌های آمیخته هستند.

در زیر نکاتی را در ارتباط با تجزیه اشمیت بیان می‌کنیم:

1- تجزیه اشمیت متعلق به یک حالت خالص از سامانه مرکب است و برای هر حالت خالصی این تجزیه وجود دارد، اما برای دو حالت $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ دو تجزیه اشمیت خواهیم داشت.

2- جمع بندی روی یک تک اندیس در تجزیه اشمیت منجر به این می‌شود که جمع بندی فقط روی بعد کوچکتر در فضای هیلبرت H_A و H_B انجام شود، به عنوان مثال اگر یک زیر سامانه دو حالتی با یک زیر سامانه n حالتی که $n \geq 2$ است درهم تنیده باشد، تجزیه اشمیت تنها دو جمله خواهد شد.

3- تجزیه اشمیت برای یک حالت کوانتمی معین یکتا نیست. در تجزیه اشمیت قدرمطلق‌های $|a_i|$ بکار می‌رود و فاز آن‌ها اختیاری فرض می‌شود. بعلاوه، اگر چندین $|a_i|$ برابر باشند بردارهای متناظر

$|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$ را می‌توان بصورت ترکیبات خطی از آنها نوشت. به عنوان مثال حالت یکتای EPR بوهم بدلیل تقارن کروی می‌تواند به شکل‌های زیر نوشته شود:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftarrow\rangle \otimes |\rightarrow\rangle - |\rightarrow\rangle \otimes |\leftarrow\rangle) \quad (2\text{-}8)$$

که در آن حالت آول در امتداد محوری Z، حالت دوم در امتداد محور x نوشته شده است.

4- تجزیه اشمیت در حالت کلی نمی‌تواند به بیش از دو سامانه تعمیم داده شود. بنابراین از آنجا که تجزیه اشمیت تنها برای حالت‌های خالص دوتایی معتبر است، در حالت کلی این معیار را نمی‌توان برای حالت‌های چندتایی بکار برد.

2-3-2- معیار ترانهاده پاره‌ای مثبت

این معیار در سال 1996 توسط پرز ارائه شد که به آن معیار پرز نیز می‌گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر عملگر چگالی ρ که در فضای هیلبرت $H_A \otimes H_B$ عمل می‌کند یک حالت جداپذیر باشد، آنگاه ماتریس‌های حاصل از ترانهاد پاره‌ای ρ نسبت به زیر سامانه‌های A و B، یعنی ρ^{T_A} و ρ^{T_B}، باید دارای ویژه مقادیر مثبت باشند، به عبارت دیگر قضیه پرز بیان می‌کند که شرط لازم برای جداپذیری در ماتریس چگالی ρ این است که ماتریس ترانهاده پاره‌ای آن نسبت به هر یک از زیر سامانه‌ها مثبت باقی بمانند. این مطلب را می‌توان بصورت زیر اثبات کرد:

فرض می‌کنیم $\rho \in H_A \otimes H_B$ جداپذیر است، بنابراین می‌توان ρ را بصورت زیر نوشت:

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} P_i |e_i\rangle\langle e_i| \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \quad (2\text{-}9)$$

که در آن، همانطور که قبلا بیان شد، $|e_i\rangle$ و $|f_i\rangle$ به ترتیب پایه‌های متعامد در فضای هیلبرت H_A و H_B هستند. ماتریس ترانهاده پاره‌ای ρ نسبت به زیر سامانه A برابر خواهد بود با:

$$\rho^{T_A} = \sum_{i=1}^{k} P_i |e_i^*\rangle\langle e_i^*| \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \quad (2\text{-}10)$$

در تساوی دوم از این نکته که $(O^*)^T = O^\dagger$ است، استفاده کردیم. به همین ترتیب این موضوع در مورد ρ^{T_B} نیز صادق است. معیار پرز شرط لازم و نه کافی برای جداپذیری به شمار می‌رود.

حالت‌هایی وجود دارند که ترانهاد پاره‌ای آنها مثبت است اما درهم‌تنیده هستند، این حالت‌ها را حالت‌های درهم‌تنیده با ترانهاد پاره‌ای مثبت یعنی PPTES می‌نامند.

Family name: Abdi someh	Name: Robabeh
Title of Thesis : dynamics of Entanglement in open quantum system with markovian and non-markovian behavior	
Supervisors: Dr. Sodeif Ahadpour	
Graduate Degree: **Master of Science** Major: Physics University: **Mohaghegh Ardabili** Graduation date: 2017/09/13	 Faculty: Science Number of pages: 97

Abstract:

In general, quantum systems can be divided into two groups of closed quantum systems and open quantum systems. Also open quantum systems are divided into two categories of Markov systems (non-memory) and non-Markov systems (memory). To distinguish these two behaviors, we use of the entanglement dynamic which can provide a lot of information about the evolution of a system. Returning information from environment to system can be translate as increasing of entanglement in specific period of times, so if increase of entanglement seen, system will have non-Markov treatment and if there is uniform reduction in entanglement, there will be Markov treatment. In special problems which have special matrixes, we have to calculate entanglement every time. For this purpose, we will use of incidence that is a scale for entanglement. For qubit systems the formation of incidence is close which called entanglement of formation. Numerical computation is done by MATLAB and FORTRAN and entanglement dynamics varying by time will be gained. Then analyzing of diagrams is done and the type of process such as Markov and non-Markov is recognized. MENFIT that can show treatment of entanglement in every time, is used too.

Keywords: 1- Dynamic of entanglement 2- Non- Markovian 3- Markovian behavior

University of Mohaghegh Ardabili

Faculty of Science

Department of Physics

Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of M.Sc. In Physics

Title:

dynamics of Entanglement in open quantum system with markovian and non-markovian behavior

Supervisors:

Sodeif Ahadpour

By:

Robabeh Abdi someh

September- 2017