۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم

گروه آموزشی فیزیک

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی فیزیک گرایش حالت جامد

عنوان:
معادله‌ی فوکر ــ پلانک برای نظریه‌ی تحول شرام ــ لونر

استاد راهنما:
دکتر مرتضی نطاق نجفی

استاد مشاور:
دکتر احد صابر تازه کند.

پژوهشگر:
سوسن تیزدست

تابستان ۱۳۹۶

نام خانوادگی دانشجو: تیزدست	نام: سوسن
عنوان پایان‌نامه: معادله‌ی فوکر ـ پلانک برای نظریه‌ی تحول شرام ـ لونر	
استاد راهنما: دکتر مرتضی نطاق نجفی استاد مشاور: دکتر احد صابر تازه‌کند	
مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد**	رشته: فیزیک
گرایش:حالت جامد	دانشگاه: **محقق اردبیلی**
دانشکده: علوم پایه	تاریخ دفاع:۹۶/۰۶/۲۲ تعداد صفحات: ۸۴

چکیده:

نظریه‌ی تحول شرام ـ لونر (SLE) یکی از مدل‌های بسیار پر کاربرد در حوزه‌ی سیستم‌های بحرانی دو بعدی است که از طریق بررسی خم‌های تصادفی، مدل‌های آماری بحرانی دو بعدی را در کلاس‌های تک ـ پارامتری قرار می‌دهد. معادله‌ی فوکر ـ پلانک (FP) ابزاری قدرتمند برای شناخت هرچه بیشتر این نظریه می‌باشد. ما در این پایان‌نامه، معادله‌ی فوکر ـ پلانک را برای خم‌های SLE به تفضیل مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعیین رفتار نوک منحنی دینامیکی SLE برحسب زمان از اهداف این پایان‌نامه می‌باشد که با استفاده از معادله‌ی FP و همچنین معادله‌ی لانژوین وابسته به آن انجام خواهد پذیرفت. همچنین با استفاده از تکنیک‌های فرایندهای تصادفی، به موضوع تعیین تابع توزیع دو ذره‌ای در گرافین تک لایه خواهیم پرداخت و فرم بسته‌ی این تابع برای چگالی‌های زیاد و برهمکنش‌ها و بی‌نظمی‌های کم را به‌دست خواهیم آورد.

کلید واژه‌ها: خم‌های تصادفی، معادله‌ی فوکر-پلانک، نظریه‌ی میدان همدیس

فهرست

فصل اول:

مقدمه

با توجه به کمبود اطلاعات ما نسبت به مدل‌های آماری بحرانی دو بعدی، شناخت هر چه بیشتر نظریه‌ی تحول شرام ـ لونر بسیار سازنده است. در این راستا معادله‌ی فوکر ـ پلانک در شناخت رفتارهای این نوع خم‌ها کمک‌کننده است. ما در نظریه‌ی میدان‌های همدیس بعنوان یکی از نظریات مهم کاملا حل‌پذیر که در آن تعداد جریان‌های پایستار بی‌نهایت است، به دنبال بررسی میدان‌های موضعی هستیم. اما در بسیاری اوقات ترجیح می‌دهیم که کمیت‌های هندسی (سرتاسری) یک سیستم را مورد بررسی قرار دهیم. نظریه‌ی تحول شرام ـ لونر خواص خم‌های مقیاس ـ ناوردا را در کلاس‌های یک پارامتری قرار می‌دهد. ارتباط این نظریه، با نظریه‌ی میدان‌های همدیس نیز مشخص شده است که در آن رابطه‌ی بین نفوذپذیری و بار مرکزی نظریه‌ی میدان همدیس متناظر، وجود دارد. فرض اساسی این نظریه، وجود تقارن همدیس برای خم‌های تصادفی است. در این پایان‌نامه، ما به مسئله‌ی معادله‌ی فوکر ـ پلانک برای نظریه‌ی شرام ـ لونر بر روی نقطه‌ی بحرانی می‌پردازیم. در این راستا، ابتدا پدیده‌های تصادفی را بطور اجمالی مورد بررسی قرار می‌دهیم، که موضوع فصل اول است. در این فصل تاکید ما بر روی خواص معادله‌ی فوکر ـ پلانک خواهد بود. در قسمت آخر این فصل تکنیک‌های فرایندهای تصادفی را برای تعیین تابع توزیع چگالی دو ذره‌ای در گرافین به‌کار می‌بریم. فصل دوم این پایان‌نامه به معرفی نظریه‌ی تحول شرام ـ لونر اختصاص داده شده است. همان‌طور که در بالا گفته شد، این نظریه برای مدل‌های بحرانی (مقیاس ـ ناوردا) طراحی شده است. بنابراین ابتدا به توصیف اجمالی پدیده‌های بحرانی می‌پردازیم که مرسوم‌ترین مثال آن‌ها، گذارهای مرتبه‌ی دوم است. رویکرد سرتاسری (هندسی) به مدل‌های بحرانی دو بعدی، تصویر جدیدی است که امروزه بسیاری از ناشناخته‌های این حوزه را روشن کرده است. در این فصل ضمن معرفی این رویکرد، مثالی از مدل آیزینگ را بیان می‌کنیم. مدل‌های تراوش و پاتس نیز مثال‌های دیگری هستند که به بررسی آن‌ها می‌پردازیم. اعمال نظریه‌ی تحول شرام ـ لونر (SLE) به این مدل‌های بحرانی و مدل‌های دیگر، موضوع اصلی این فصل را تشکیل می‌دهد که به‌طور مفصل بیان خواهد شد. همچنین خواص SLE را مررور خواهیم کرد. \\گروزبرگ و همکاران اولین کسانی بودند که معادله‌ی فوکر ـ پلانک را برای نظریه‌ی SLE بیان کرده و مورد تحلیل قرار دادند. برای این کار از نگاشت عقب گرد SLE استفاده می‌شود. در فصل سوم این موضوع را به تفصیل بررسی می‌کنیم. مهم‌ترین خواسته‌ی این فصل، بررسی خواص جواب‌های این معادله است که در حدهای مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نشان خواهیم داد که تعداد متغیرهای مستقل این معادله، به دو تا قابل کاهش است و معادله‌ی حاکم، یک معادله‌ی هذلولی می‌باشد. یکی دیگر از تحلیل‌های ما، تحلیل معادله‌ی لانژوین مربوطه در حد زمان‌های طولانی است. در آخر نیز مکان متوسط (تقریبی) رأس خم SLE (که در حال طی کردن یک فرایند دینامیکی است) را به‌صورت تابعی از زمان ارائه خواهیم داد. این نتیجه می‌تواند آزمونی برای خم‌های SLE باشد.

فصل دوم:

پدیده‌های تصادفی و معادله‌ی فوکر ـ پلانک

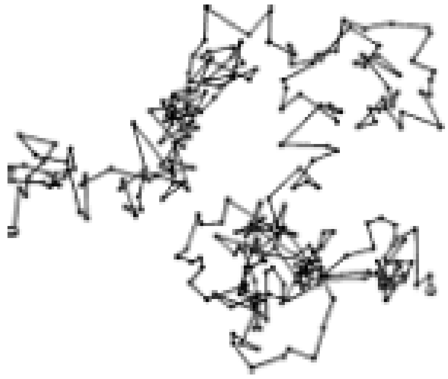
در این فصل ما به بررسی پدیده‌های تصادفی و همچنین معادله‌ی فوکر ـ پلانک می‌پردازیم. برای توصیف پدیده‌های فیزیکی اطراف، عمدتا معادلات حرکتی تعینی نیوتونی و یا قواعد کوانتومی کافی نیستند، به این معنی که نیروهای کنترل نشده‌ی زیادی می‌توانند در حرکت ذرات نقش بازی کنند. مدل کردن این نیروها صرفا با معادلات منظم نیوتونی و یا کوانتومی، عملی ناممکن به نظر می‌رسد و رویکردی متفاوت را می‌طلبد. برای مثال، ذره‌ی غباری را در نظر بگیرید که حرکت آن را دنبال می‌کنیم. درجات آزادی بسیاری در حرکت این ذره دخیل است. به زبانی دیگر، حرکت این ذره دائما از ذرات دیگر تاثیر می‌پذیرد و ضربه‌های متوالی ذرات دیگر به ذره‌ی مورد نظر، مسیر حرکت خاصی را برای این ذره بوجود می‌آورد که ممکن است کاملا تصادفی دیده شود، اما در اصل حرکت آن ذره کاملا تعینی و تحت اثر نیروهای دیگر می‌باشد. سوال اساسی که ما در این فصل به آن می‌پردازیم، این است که چنین حرکت‌های پیچیده‌ای را چگونه می‌توان پیگیری کرد و این‌که آیا می‌توان، مدل‌های تصادفی را بیان نمود که توصیف دقیقی از حرکت ذره داشته باشند. ما برای این منظور، طبیعتا باید به سراغ نظریه‌ی احتمال برویم و حرکت چنین سیستم‌هایی را از جنبه‌ی احتمالاتی بررسی نماییم. در قسمت بعد به عنوان مثالی اولیه به تعریف و توصیف حرکت براونی می‌پردازیم و سپس بحث را به حرکت‌های کلی‌تر گسترش می‌دهیم.

۱.۲ حرکت براونی و معادله‌ی لانژوین

۱.۱.۲ حرکت براونی

مثال قسمت قبل در مورد ذره‌ی غبار را در نظر بگیرید. چنین حرکتی اگرچه در مقیاس کوچک تعینی است، اما در مقیاس بزرگ بهتر است به‌صورت حرکتی تصادفی دیده شود. این تصادفی بودن، تفاوت عمده و ذاتی با تصادفی بودن در کوانتوم دارد، زیرا در کوانتوم دینامیک ذره ذاتا احتمالاتی می‌باشد. بنابراین در طول این فصل، ما مفهوم تصادفی بودن را به‌صورت گفته شده در بالا به ذهن

می‌سپاریم و سروکار عمده‌ی ما با افت‌وخیزهای متغیرهای تصادفی خواهدبود. لازم به ذکر است که هرگاه ما این افت‌وخیزها را از بین ببریم، به معادلات منظم نیوتونی خواهیم رسید. متغیر تصادفی یک بعدی x را در نظر بگیرید که با زمان t بیان می‌شود. به‌طور کلی ما با دو نوع فرایند سروکار خواهیم داشت، که تعیینی یا تصادفی نامیده می‌شوند. اگر متغیر طوری رفتار کند که از مقادیر x در $t < t_0$ و $t = t_0$ نتوانیم رفتار متغیر را در $t > t_0$ به‌صورت دقیق پیش‌بینی کنیم در این‌صورت $x(t)$ را فرایند تصادفی می‌گویند. این فرایند به علت وجود افت‌وخیزها و تصادفی بودن غیرقابل تکرار می‌باشد و همچنین درصورت تغییر مختصر در شرایط اولیه، نتیجه‌ی نهایی تغییرات قابل توجهی خواهد داشت. این در صورتی است که، در فرایندهای تعینی می توان با اطلاع از گذشته و حال سیستم مورد بررسی، به‌طور معین به پیش‌بینی رفتار سیستم در زمان آینده پرداخت. حرکت براونی یک نمونه از فرایندهای تصادفی می باشد. این حرکت، به نوعی از حرکت تصادفی ذرات غوطه ور در سیال (مایع یا گاز) براثر برخورد با اتم‌ها یا مولکول‌ها گفته می‌شود.



شکل ۱.۲: حرکت براونی (برگرفته از مرجع [۱])

در سال ۱۸۲۷ گیاه‌شناس، رابرت براون [۱]، هنگامی که توسط میکروسکوپ به گرده‌های گیاه معلق در آب نگاه می کرد، متوجه حرکت تصادفی ذرات در آب شد ولی نتوانست توصیف مناسبی برای آن پیدا کند. آلبرت انیشتین چند دهه بعد در مقاله ای که در سال ۱۹۰۵ منتشر کرد، بیان کرد که این حرکت در نتیجه‌ی برخورد مولکول‌های آب با گرده بوده است. جهت نیروی حاصل از برخورد

مولکول‌ها مرتبا تغییر می‌کند و ذره در زمان‌های مختلف ممکن است از یک سمت بیشتر از سمت دیگر مورد اصابت قرار گیرد، که این‌ها موجب حرکت تصادفی ذرات می‌شوند. این پدیده به افتخار رابرت براون، حرکت براونی نامگذاری شد. برای توصیف این پدیده، انیشتین یک زمان برخورد τ را معرفی نمود. این زمان خیلی بزرگ‌تر از زمان‌های اتمی فرض شد که در طی آن ذرات به‌طور مستقل رفتار می‌کنند و همچنین بسیار کوچک‌تر از بازه‌های زمانی مشاهده‌پذیرها در نظر گرفته شد. او فرض کرد در طی زمان τ، مختصه‌ی x ذرات به اندازه‌ی Δ تغییر پیدا می‌کند که این کمیت برای ذرات گوناگون، متفاوت است. در این بررسی، حرکت مستقل از هم ذرات در بازه‌ی زمانی τ مورد بررسی قرار گرفت. فرض کنید dn تعداد ذراتی هستند که انتقال بین Δ و $\Delta + d\Delta$ را تجربه کرده‌اند و توسط معادله‌ای به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta \qquad (۱.۲)$$

در رابطه‌ی بالا تابع ناشناخته‌ی $\phi(\Delta)$ معرفی شده است که دارای ویژگی‌های $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Delta)d\Delta = 1$ و $\Phi(\Delta) = \Phi(-\Delta)$ می‌باشد. برای یافتن ارتباط بین ضریب پخش ذره‌ی براونی و تابع $\phi(\Delta)$، به بررسی تعداد ν ذره در حجم v که به x و t وابسته است می‌پردازیم. $\nu = f(x,t)$ را تعداد ذرات در واحد حجم در نظر گرفته و با توجه به موقعیت ذرات در زمان t، توصیفی از آن‌ها در زمان $t+\tau$ را به‌دست می‌آوریم. المان فضایی $[x, x+dx]$ را در نظر بگیرید که تعداد dn ذره در آن قرار دارد. با توجه به تعریف تابع $\phi(\Delta)$، تعداد ذرات در زمان $t+\tau$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$f(x, t+\tau)dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\Delta, t)\Phi(\Delta)d\Delta \qquad (۲.۲)$$

با توجه به کوچک بودن τ و Δ می‌توان $f(x,t+\tau)$ و $f(x+\Delta,t)$ را بسط داده و در معادله‌ی بالا به کار برد، که حاصل آن به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$f+\frac{\partial f}{\partial t}=f\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\Phi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^{۲}}{۲}\Phi(\Delta)d\Delta \qquad (۳.۲)$$

با توجه به ویژگی‌های بیان شده در بالا برای تابع $\phi(\Delta)$، فقط جمله‌های فرد در طرف دوم رابطه‌ی بالا باقی می‌مانند و نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\frac{۱}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^{۲}}{۲}\Phi(\Delta)d\Delta\right)\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=D\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}} \qquad (۴.۲)$$

که رابطه‌ی بالا، معادله‌ی پخش می‌باشد. در این رابطه D عامل مشترک پخش است. در محاسبات بالا برهمکنش بین ذرات در نظر گرفته نشده است. جواب معادله‌ی فوق به‌صورت گاوسی زیر می‌باشد که توزیعی نرمال با واریانس $\sqrt{t}$ است:

$$f(x,t)=\frac{n}{\sqrt{۴\pi D}}\frac{\exp\left(\frac{-x^{۲}}{۴Dt}\right)}{\sqrt{t}} \qquad (۵.۲)$$

و تغییر مکان λ_x برای یک ذره به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\lambda_x=\sqrt{\bar{x}^{۲}}=\sqrt{۲Dt}\,. \qquad (۶.۲)$$

نگرش ارائه شده توسط انیشتین را می‌توان شروعی بر فرایندهای تصادفی دانست. نگرش موازی با رویکرد انیشتین توسط لانژوین ارائه شد که در بخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲.۱.۲ معادله‌ی لانژوین

لانژوین روش جدیدی را که منطبق بر استدلال انیشتین بود، به این شرح ارائه کرد:
او برهمکنش بین ذرات به جرم m را تصادفی در نظر گرفت و نیروی گرانروی را نیز در مسئله وارد کرد و سپس به حل معادله‌ی دوم نیوتون پرداخت. نیروی گرانروی به‌صورت $-6\pi\eta a\frac{dx}{dt}$ می‌باشد که در آن η چسبندگی سطحی و a شعاع ذره که به‌صورت کروی فرض شده است می‌باشد. نیروی تصادفی X نماینده‌ی ضربات پیوسته‌ی مولکول‌های مایع بر ذرات براونی می‌باشد، که این نیرو با احتمال مساوی مثبت یا منفی است. نیروی گرانروی قسمت تعینی و نیروی ضربه‌ای قسمت تصادفی معادله‌ی لانژوین را تشکیل می‌دهند. بنابراین معادله‌ی حرکت برای موقعیت ذرات، توسط قانون دوم نیوتون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta a\frac{dx}{dt} + X \tag{۲.۷}$$

که ضرب کردن جمله‌ی تصادفی x به معادله‌ی بالا و توجه به این نکته که جمله‌ی $\langle Xx\rangle$ به علت تصادفی بودن کمیت x صفر می‌باشد و همچنین با توجه به این‌که از مکانیک آماری $\left\langle \frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \frac{1}{2}kT$ را داریم، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{kT}{3\pi\eta a} + c\exp\left(\frac{-6\pi\eta a}{m}t\right) \tag{۲.۸}$$

که در آن c یک ثابت اختیاری است. جمله‌ی دوم معادله‌ی بالا در زمانی از مرتبه‌ی 10^{-8} ثانیه به صفر میل کرده و قابل اغماض می‌باشد. رابطه‌ی نهایی به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\langle x^2\rangle - \langle x_0^2\rangle = \left[\frac{kT}{3\pi\eta a}\right]t \tag{۲.۹}$$

با مقایسه (۹.۲) با (۶.۲)ضریب پخش D به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{۱۰.۲}$$

ارتباط بین معادله‌ی لانژوین و معادله‌ی انیشتین، بسیار با اهمیت است و یکی از سنگ بناهای فرایندهای تصادفی است. به بیان دقیق‌تر متناسب با هر معادله‌ی لانژوین، یک معادله برای تابع توزیع احتمالاتی وجود دارد که در شرایط خاصی می‌تواند معادله‌ی فوکر ـ پلانک باشد. در قسمت بعد به برخی مفاهیم احتمالاتی می‌پردازیم که برای ادامه‌ی بحث ضروری است.

۲.۲ مفاهیم اساسی احتمالات

در این بخش به بیان برخی مفاهیم اساسی احتمالاتی می‌پردازیم. $p(A)$ را احتمال رخداد A در نظر می‌گیریم و Ω مجموعه‌ی تمام رویدادهایی می‌باشد که دارای احتمال یک است و حالت تهی احتمال صفر را داراست. احتمال، همواره مقداری از بازه‌ی $[0, 1]$ را اختیار می‌کند. در احتمال شرطی، شرایط خاصی برای رویداد معرفی می‌شود. برای مثال، حالتی که $\omega \in A$ باشد در صورتی که قبلا $\omega \in B$ بوده از رابطه‌ی احتمال شرطی زیر به‌دست می‌آید:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}. \tag{۱۱.۲}$$

برای محاسبه‌ی مقدار میانگین یک متغیر مانند X، کمیت $X(n)$ را که مقدار قابل رؤیت منحصربفردی از آن کمیت است در نظر می‌گیریم و تعداد نمونه‌ها را با N نمایش می‌دهیم در این‌صورت

مقدار میانگین توسط رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X(n). \qquad (۱۲.۲)$$

۱.۲.۲ گشتاورها،همبستگی وهموردایی

گشتاورهای $\langle X^n \rangle$ که اغلب به آسانی محاسبه می‌باشند، اطلاعات مفیدی برای ما به‌دست می‌دهند. چگالی احتمال وقتی $x \to \pm\infty$ باید همیشه به صفر میل کند. با اهمیت‌ترین گشتاورها، گشتاورهای اول و دوم می‌باشد. برای یک تک متغیر X، واریانس که تابعی از گشتاور اول و دوم است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{var}\{X\} \equiv \{\sigma[X]\}^2 \equiv \left\langle [X - \langle X \rangle]^2 \right\rangle . \qquad (۱۳.۲)$$

و در حالت چند متغیره، ماتریس کواریانس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle X_i, X_j \rangle \equiv \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle \equiv \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle \qquad (۱۴.۲)$$

بدیهی است که

$$\langle X_i, X_i \rangle = \mathrm{var}\{X_i\} \qquad (۱۵.۲)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا واضح است که اگر متغیرهای جفت شده مستقل باشند، ماتریس کواریانس قطری است.

۲.۲.۲ تابع مشخصه و تابع مولد

برای بیان تابع مشخصه، بردار s که به‌صورت $(s_1, s_2, ..., s_n)$ و بردار متغیر تصادفی X که به‌صورت $(X_1, X_2, ..., X_n)$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم که در این‌صورت تابع مشخصه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(s) = \langle \exp(is.X) \rangle = \int dx p(x) \exp(is.x) \tag{۱۶.۲}$$

تابع مشخصه دارای ویژگی‌هایی از قبیل $\phi(0) = 1$ و $|\phi(s)| \leq 1$ می‌باشد. این تابع کاربرد زیادی در فرایندهای تصادفی دارد و اغلب انجام عملیات بر روی آن آسان‌تر از انجام آن بر روی خود تابع توزیع می‌باشد. تابع مولد تجمعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(s) = \log \phi(s). \tag{۱۷.۲}$$

با فرض وجود تمام گشتاورها، تابع مشخصه و تابع مولد بسط پذیر بوده که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(s) = \sum_{r=1}^{\infty} i^r \sum_{|m|} \langle\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} ... X_n^{m_n} \rangle\rangle \frac{s_1^{m_1} s_2^{m_2} ... s_n^{m_n}}{m_1! m_2! ... m_n!} \delta(r, \sum_{i=1}^{n} m_i) \tag{۱۸.۲}$$

در رابطه‌ی بالا، کمیت $\langle\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} ... X_n^{m_n} \rangle\rangle$، تجمع یا انباشتک[1] کمیت X نامیده می‌شود. همچنین بسط تابع مشخصه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{|m|} \langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} ... X_n^{m_n} \rangle \frac{r!}{m_1! m_2! ... m_n!} \delta(r, \sum_{i=1}^{m} m_i) s_1^{m_1} s_2^{m_2} ... s_n^{m_n} \tag{۱۹.۲}$$

[1] camulants

که از مقایسه‌ی رابطه‌ی بالا با رابطه‌ی (۱۸.۲) معادله‌ی کلی نمی‌توان به‌دست آورد، اما اولین انباشتک‌ها به شکل زیر قابل استخراج هستند:

$$\langle\langle x_i\rangle\rangle = \langle X_i\rangle \tag{۲۰.۲}$$

$$\langle\langle x_i x_j\rangle\rangle = \langle X_i X_j\rangle - \langle X_i\rangle\langle X_j\rangle \tag{۲۱.۲}$$

$$\begin{aligned}\langle\langle x_i x_j x_k\rangle\rangle &= \langle X_i X_j X_k\rangle - \langle X_i X_j\rangle\langle X_k\rangle - \langle X_i\rangle\langle X_j X_k\rangle\\ &- \langle X_i X_k\rangle\langle X_j\rangle + ۲\langle X_i\rangle\langle X_j\rangle\langle X_k\rangle\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

که در این روابط $\langle\langle\ \rangle\rangle$ نشان‌دهنده‌ی انباشتک است.

۳.۲.۲ تابع توزیع گاوسی

در این قسمت به بیان مهم‌ترین توصیف احتمالاتی که توصیف گاوسی یا نرمال است می‌پردازیم. اگر X یک بردار و n متغیر تصادفی گاوسی باشد، تابع چگالی احتمالاتی چندمتغیره متناظر، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$p(x) = [(۲\pi)\det(\sigma)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{۱}{۲}(x-\bar{x})^T\sigma^{-۱}(x-\bar{x})\right] \tag{۲۳.۲}$$

با توجه به اینکه برای این توزیع داریم:

$$\langle x\rangle = \int dx\, x p(x) = \bar{x} \tag{۲۴.۲}$$

$$\langle XX^T \rangle = \int dx x x^T p(x) = \bar{x}\bar{x}^T + \sigma \tag{۲۵.۲}$$

تابع مشخصه، به سادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi(s) = \langle \exp(is^T X) \rangle = \exp(is^T \bar{x} - \frac{۱}{۲} s^T \sigma s) \tag{۲۶.۲}$$

در معادله‌ی (۲۵.۲)، σ ماتریس کواریانس متقارن است که دارای عناصر مرتبه‌ی دوم تابع همبستگی است. ارتباط دقیق بین گشتاورهای مراتب بالاتر و ماتریس کواریانس σ را می‌توان با استفاده از ارتباط بین گشتاورها و تابع مشخصه به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\langle X_i X_j X_k \ldots \rangle = \frac{(۲N)!}{N! ۲^N} \{\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\ldots\}_{sym.} \tag{۲۷.۲}$$

۴.۲.۲ توزیع پواسون

یکی از توزیع‌های بسیار بااهمیت در فرایندهای تصادفی که در آن متغیرها مثبت و صحیح‌اند، توزیع پواسون می‌باشد. توزیع پواسون مربوط به متغیر X به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(X = x) \equiv p(x) = \frac{e^{-\alpha}\alpha}{x!}. \tag{۲۸.۲}$$

به‌طور واضح، عامل گشتاورها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle x^r \rangle_f = \langle x(x - ۱)\ldots(x - r + ۱) \rangle \tag{۲۹.۲}$$

$$\langle x^r \rangle_f = \alpha^r. \qquad (۳۰.۲)$$

برای متغیرهای صحیح نامنفی ما می‌توانیم تابع مولد را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p(x) = \langle s^x \rangle \qquad (۳۱.۲)$$

که ارتباط این تابع با تابع مشخصه توسط رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$G(s) = \Phi(-i \log s). \qquad (۳۲.۲)$$

از آن‌جا که تابع مولد خاصیت مفید زیر را داراست:

$$\langle x^r \rangle_f = \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^r G(s) \right]_{s=1}. \qquad (۳۳.۲)$$

در این‌صورت برای توزیع پواسون مربوطه، تابع مولد با استفاده از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}(s\alpha)^x}{x!} = \exp\left[\alpha(s-1)\right]. \qquad (۳۴.۲)$$

ارتباط بین عامل تابع مولد تجمعی و تابع مولد به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$g(s) = \log G(s) \qquad (۳۵.۲)$$

و همچنین ارتباط بین تابع مولد تجمعی و عامل انباشتک $\langle\langle x^r\rangle\rangle_f$ توسط رابطه‌ی زیر بیان می‌گردد:

$$g(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \langle\langle x^r\rangle\rangle_f \frac{(s-1)^r}{r!}. \qquad (۳۶.۲)$$

با توجه به روابط بالا می‌بینیم که توزیع پواسون تمام عامل‌ها را داراست ولی اولین عامل انباشتک آن، مقدار صفر را دارد.

۳.۲ فرایند مارکوف

در این بخش به معرفی فرایند مارکوف پرداخته و شرایط مارکوف بودن یک فرایند را شرح می‌دهیم. در این راستا به بیان معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف و شکل دیفرانسیلی آن می‌پردازیم و توضیح مختصری درباره‌ی معادلات رو به عقب ارائه می‌دهیم.

برای معرفی فرایند مارکوف تابع توزیع مشترک n تایی به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n) = p(x_1,t_1|x_2,t_2)p(x_2,t_2;...;x_n,t_n) \qquad (۳۷.۲)$$

در حالتی که $p(x_1,t_1|x_2,t_2;...;x_n,t_n) = p(x_1,t_1|x_2,t_2)$ که در آن $t_1 > t_2 > ... > t_n$ باشد، این فرایند مارکوف بوده و احتمال مشترک آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p(x_1,t_1;...;x_n,t_n) = p(x_1,t_1|x_2,t_2)...p(x_{n-1},t_{n-1}|x_n,t_n)p(x_n,t_n). \qquad (۳۸.۲)$$

۱.۳.۲ معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف

در این قسمت شرط لازم برای مارکوف بودن یک فرایند را بررسی می‌کنیم. این شرط، توسط معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف بیان می‌شود. ارتباط بین احتمال مشترک سه‌تایی و دوتایی که برای هر فرایندی صحیح می‌باشد به‌صورت زیر است:

$$p(x_1,t_1;x_3,t_3)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_2\,p(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3) \qquad (۳۹.۲)$$

با تبدیل احتمالات مشترک به احتمالات شرطی و با استفاده از $p(x_1,t_1|x_2,t_2;x_3,t_3)=p(x_1,t_1|x_2,t_2)$ که در آن $t_1>t_2>t_3$است، به معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف پیوسته به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$p(x_1,t_1|x_3,t_3)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_2\,p(x_1,t_1|x_2,t_2)p(x_2,t_2|x_3,t_3). \qquad (۴۰.۲)$$

در ادامه شکل دیفرانسیلی معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف را به‌دست خواهیم آورد.

معادله‌ی دیفرانسیلی چپمن ـ کولموگروف

تحت شرایط مناسب معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف می‌تواند به یک معادله‌ی دیفرانسیلی تبدیل شود که در ادامه، این شرایط را بیان می‌کنیم:

برای همه‌ی $\varepsilon > 0$ و برای $|x-z| \geq \varepsilon$ در t یکنواخت خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&i)\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0} p(x,t+\Delta t|z,t)}{\Delta t} = w(x|z,t)\\
&ii)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-z|<\varepsilon} dx(x_i-z_i)p(x,t+\Delta t|z,t) = A_i(z,t)+o(\varepsilon)\\
&iii)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-z|<\varepsilon} dx(x_i-z_i)(x_j-z_j)p(x,t+\Delta t|z,t) = B_{ij}(z,t)+o(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{۴۱.۲}
$$

مراتب بالاتر به صفر میل می‌کند که به آسانی قابل اثبات می‌باشد. برای به‌دست آوردن شکل دیفرانسیلی معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف به شکل زیر عمل کرده، ابتدا مشتق زمانی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
\partial_t \int dx f(x)p(x,t|y,t') = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int dx f(x)\left[p(x,t+\Delta t|y,t') - p(x,t|y,t')\right]\right\}/\Delta t
\tag{۴۲.۲}
$$

با استفاده از معادله‌ی چپمن ـ کولموگروف و تبدیل انتگرال x به دو ناحیه $|x-z| \geq \varepsilon$ و $|x-z| < \varepsilon$ و استفاده از رابطه‌ی

$$
f(x) = f(z) + \sum_i \frac{\partial f(z)}{\partial z_i}(x_i-z_i) + \sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j}(x_i-z_i)(x_j-z_j) + |x-z|^2 R(x,z)
$$

Family name: Tizdast	Name: Susan
Title of Thesis: Fokker – Planck equation of the Schramm – Loewner evolution	
Supervisor(s): Morteza Nattagh Najafi (PHD) Advisor(s): Ahad Saber Tazehkand (PHD)	
Graduate Degree **M.Sc.**	
Major: Physics	Specialty: solid state physics (Theoritical)
University: **Mohaghegh Ardabili**	Faculty: Basic Science
Graduation date: 2017.09.13	Number of pages: 84

Abstract:

Schram-Loewner Evolution (SLE) is one of the useful theories in two dimensional (2D) critical systems which classifies the critical statistical systems in one-parameter classes, via studying the stochastic curves. The Fokker-Planck equation is a powerful technology for understanding this theory. In this thesis we employ FPE to study SLE curves in detail. Identifying the behavior of the tip of a SLE curve in terms of "Time" is one of the aims of the present thesis which is done using the FPE and also the corresponding Langevin equation. We also study the identification of two-body distribution function of mono-layes graphen, using the stachastic phenomeno techniques and find a close form of this function for the high-density and low inter-particle interactions and disorders limits.

Keywords: Conformal Field Theory , Fokker-Planck equation, Stochastic Curves

University of Mohaghegh Ardabili

Faculty of Science

Department of Physics

Thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of M.Sc. inPhysics

Title:

Fokker – Planck equation of the Schramm – Loewner evolution

Supervisor:

Morteza Nattagh Najafi (Ph. D)

Advisor:

Ahad Saber Tazehkand (Ph. D)

By:

Susan Tizdast

September – 2017