

# هندسه‌ی ترمودینامیکی توزیع آماری تعمیم یافته‌ی کاپا

مهری دهنوی، حسین<sup>۱</sup>؛ محمدزاده، حسین<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، خیابان شریعتی، ۷۱۱۶۷-۴۷۱۴۸، بابل

<sup>۲</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، صندوق پستی ۱۷۹، اردبیل

## چکیده

در این مقاله به مطالعه‌ی سیستم گاز ایده‌آل با تابع توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  می‌پردازیم. با استفاده از یکی از رهیافت‌های هندسه‌ی ترمودینامیکی انحنا‌ی ترمودینامیکی توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  را برای گاز ایده‌آل کلاسیکی، بوزونی و فرمیونی را بدست می‌آوریم. نتایج ما بیانگر این امر است که برهمکنش بوزنها با توزیع تعمیم یافته، در بعضی از نواحی فیزیکی می‌تواند رفتار دافع داشته باشند. همچنین برای برخی از مقادیر گریزندگی انحنا‌ی ترمودینامیکی واگرا بوده، بنابراین احتمال رخ دادن گذار فاز، و چگالش بوز-انیشتین وجود دارد. برای گاز ایده‌آل کلاسیکی و فرمیونی با توزیع تعمیم یافته برهمکنش آماری ذرات دافعه است.

## Thermodynamic Geometry of generalized $\kappa$ distributed statistics

Mehri-Dehnavi, Hossein<sup>1</sup>; Mohammadzadeh, Hosein<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Babol Noshirvani University of Technology, Shariati Ave., Babol, 47148-71167, Iran,

<sup>2</sup> Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, P.O. Box 179, Ardabil, Iran

## Abstract

We consider an ideal gas system with generalized  $\kappa$ -dependent distribution function. Using a thermodynamic geometry approach, we derive the thermodynamic curvature of generalized  $\kappa$ -dependent distributed ideal classical, bosonic and fermionic gases. We show that the intrinsic statistical interaction of generalized bosons can be repulsive in some physical ranges. Also, the thermodynamic curvature of generalized boson gas is singular at a specified value of fugacity and therefore, a phase transition such as Bose-Einstein condensation can take place. For generalized fermi and classical gas, the intrinsic statistical interaction is repulsive.

PACS No. 05

ترمودینامیک هندسی مفاهیم چگالی ذرات، انرژی، تعداد کل ذرات، آنتروپی و دیگر کمیات ترمودینامیکی را به مشخصات هندسی مربوط به سیستم مورد نظر مرتبط می‌سازد. در نقاطی که اسکار ریچی مربوط به فضای ترمودینامیکی منفی می‌شود سیستم مربوطه برهمکنش آماری دافعه یا فرمیونی خواهد داشت. همچنین با مثبت شدن این کمیت، سیستم فیزیکی برهمکنش آماری جاذب و یا بوزنی دارد. با واگرا شدن این کمیت هندسی، احتمال گذار فاز در سیستم وجود دارد. مثلاً انحنا‌ی ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده-ال در نقطه‌ی چگالش واگرا است [۲]. ترمودینامیک هندسی برای

## مقدمه

هندسه ترمودینامیکی توصیف دیگری برای حل مسائل ترمودینامیکی است. این رهیافت از ترمودینامیک، با استفاده از هندسه ریمانی و مینفلد، فرمولبندی جدیدی از علم ترمودینامیک ارائه می‌کند. جورج راپینیر با انتشار مقاله‌ای در سال ۱۹۷۹ تحت عنوان "ترمودینامیک: مدل هندسه ریمانی" برای اولین بار فرمولبندی منسجمی برای این رهیافت نوین از ترمودینامیک ارائه نمودند [۱]. به همین دلیل ترمودینامیک هندسی، ترمودینامیک راپینیر نیز نامیده می‌شود.

مدل های مختلف فیزیکی شامل ذرات مکسول بولتزمن، فرمیونی و بوزونی در مراجع [۴،۳] به کار برده شد.

جانزک و مروگلا انحناهای ترمودینامیکی را برای گاز ایده آل بوزونی و فرمیونی حساب کردند و گزارش دادند که علامت انحناهای ترمودینامیکی همیشه برای این دو گاز ایده آل متفاوت است [۵].

اخیراً در مراجع [۶-۱۳] انحناهای ترمودینامیکی برای آمارهای ناآبلی، آمارهای میانی از قبیل آمار کسری هالدن، آمار پلی-کروناکوس، آمار بوزونی و فرمیونی تسالیس و کاربردهای آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

نشان داده شده است که توزیع آماری مناسبی که می تواند مبانی نسبیت را نیز در بر بگیرد، توزیع تعمیم یافته

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\exp_{\kappa}(\beta(\varepsilon - \mu)) + a} \quad (1)$$

است [۱۴]. در این رابطه،  $\varepsilon$  انرژی ذرات،  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ،  $\mu$  پتانسیل شیمیایی و پارامتر  $a$ ، برابر با یک برای فرمیونها و منفی یک برای بوزون ها و صفر برای ذرات کلاسیکی است. همچنین

$$\exp_{\kappa}(x) = (\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x)^{1/\kappa} \quad (2)$$

که در حالت حدی داریم  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} (\exp_{\kappa}(x)) = e^x$  [۱۴].

در حد ترمودینامیکی، برای یک گاز ایده آل در یک جعبه  $D$  بعدی با حجم  $L^D$  با رابطه پاشندگی  $\varepsilon = ap^{\sigma}$  ( $\sigma = 2$ ) معادل گاز کلاسیکی ( $\sigma = 1$ ) معادل گاز فرانسیتی) با استفاده از توزیع تعمیم یافته نسبیتی داده شده در رابطه (۱)، انرژی کل و تعداد کل ذرات سیستم به ترتیب به صورت زیر نوشته می شود.

$$U = \int_0^{\infty} \varepsilon n(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3)$$

$$N = \int_0^{\infty} n(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4)$$

که در آن  $\Omega(\varepsilon) = \frac{A^D}{\Gamma(D/2)} \varepsilon^{\frac{D}{\sigma}-1}$  چگالی حالت ها می باشد.

همچنین برای سادگی محاسبات ثابت  $A = L\sqrt{\pi}/(h\alpha^{\frac{1}{\sigma}})$  را برابر با یک فرض می کنیم.

### ترمودینامیک هندسی و آمار نسبیتی

سابقه‌ی ارائه‌ی ساختار هندسی برای سیستم ترمودینامیکی به گیبس بر می گردد [۱۵]. وینهولد مشتقات مرتبه دوم انرژی را به

عنوان پارامترهای هندسی سیستم ترمودینامیکی در نظر گرفت [۱۶]. همچنین رایپنیر، مشتقات مرتبه دوم آنتروپی به عنوان پارامترهای هندسی سیستم ترمودینامیکی در نظر گرفت [۱۷،۱۸].

در این مقاله از فرمولبندی مرجع [۵] استفاده می کنیم، که متریک فضای هندسی مربوط به سیستم ترمودینامیکی به صورت

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^i \partial \beta^j}, \quad (5)$$

تعریف می شود که  $\beta^i = \frac{1}{k_B} \frac{\partial S}{\partial X^i}$  که  $\{X^i\}$  مجموعه‌ی پارامترهای موثر سیستم ترمودینامیکی مورد مطالعه هستند. برای سیستم مورد مطالعه‌ی ما  $(\beta^1, \beta^2) = (\beta, \gamma)$  که در آن  $\gamma = -\frac{\mu}{k_B T} = -\ln z$  و به  $z = e^{\beta\mu}$  گریزندگی می گویند.

بنابراین برای سیستم دوبعدی مورد مطالعه خواهیم داشت

$$g_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial U}{\partial \beta},$$

$$g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta \partial \gamma} = -\frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad (6)$$

$$g_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \gamma^2} = -\frac{\partial N}{\partial \gamma}.$$

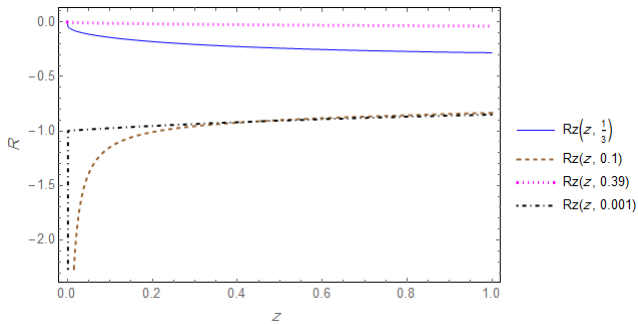
در سیستمی با فضای پارامترهای ترمودینامیکی دو بعدی انحناهای ترمودینامیکی  $R$  برابر است با

$$R = -\frac{\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \\ g_{\beta\beta,\beta} & g_{\beta\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\beta} \\ g_{\beta\beta,\gamma} & g_{\beta\gamma,\gamma} & g_{\gamma\gamma,\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}^2}, \quad (7)$$

که در رابطه‌ی فوق از نمادگذاری  $g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \beta^k}$  استفاده نمودیم.

در ادامه سعی می کنیم تا رهیافت ترمودینامیک هندسی را برای توزیع تعمیم یافته‌ی (۱) بررسی کنیم. در واقع با استفاده از روابط (۷-۳) برای این توزیع می توانیم مقدار انحناهای هندسی سیستم ترمودینامیکی را بدست آوریم. نکته‌ی حائز اهمیت این است که مقدار انرژی حاصل از رابطه‌ی (۳) برای همه‌ی مقادیر  $\kappa \geq 0$

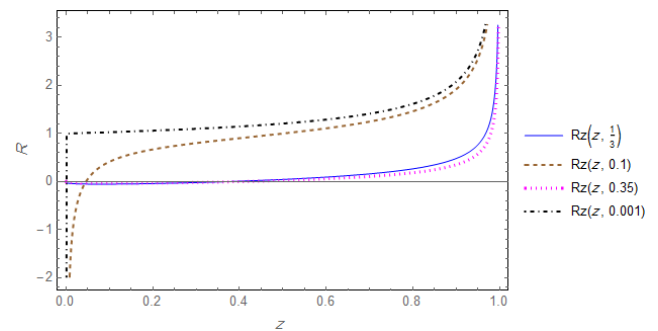
متناهی نیست و برای اجتناب از واگرایی ماورای بنفش انرژی باید خود را به مقادیر  $0 \leq \kappa < \frac{\sigma}{\sigma+D}$  محدود کنیم.



شکل ۲: انحنای ترمودینامیکی برای سیستم فرمیونی با  $\sigma=2$ ،  $D=3$  و  $\kappa=1/3$  منحنی پر مربوط به  $\kappa=0.1$ ، منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.39$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.001$  مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد.

شکل ۲ انحنای ترمودینامیکی برای گاز ایده آل فرمیونی،  $a=+1$  را نشان می دهد. همانطور که در شکل مشاهده می شود، نمودار خط-نقطه، مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد. می دانیم حد  $\kappa \rightarrow 0$  نشان دهنده ی آمار متداول هست، و این نمودار نشان می دهد این منحنی نیز به رفتار فرمیونها با توزیع متداول شبیه است، با این تفاوت که مقدار انحنای فرمیونهای متداول برای مقادیر کوچک  $z$  به سمت عدد منفی یک میل می کند [۲]. پس برای فرمیونهای متداول و همچنین فرمیونها با توزیع تعمیم یافته ی (۱) برهمکنش آماری یکسان و دافعه می باشد. همچنین، در شکل ۲ منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$  منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$  می باشند. همه ی این نمودارها برای سیستم سه بعدی  $D=3$  و برای  $\sigma=2$ ، رسم شده اند.

شکل ۳ انحنای ترمودینامیکی برای گاز ایده آل کلاسیک،  $a=0$ ، با توزیع تعمیم یافته ی (۱) را نشان می دهد. همانطور که در شکل مشاهده می شود، نمودار خط-نقطه، مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد. در واقع حد  $\kappa \rightarrow 0$  نشان دهنده ی ذرات کلاسیکی در آمار متداول است. برای چنین ذراتی، انحنای ترمودینامیکی همواره برابر با صفر است [۲]. نمودار خط-نقطه در تمامی مقادیر غیر صفر  $z$  به ذرات کلاسیکی با آمار متداول شبیه است. همچنین، در شکل ۳ منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$  منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$  می باشند. همه ی این نمودارها برای سیستم سه بعدی  $D=3$  و برای  $\sigma=2$ ، رسم شده اند.



شکل ۱: انحنای ترمودینامیکی برای سیستم بوزنی با  $\sigma=2$ ،  $D=3$  و  $\kappa=1/3$  منحنی پر مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد.

انحنای ترمودینامیکی برای حالت بوزنی،  $a=-1$ ، شکل ۱ رسم شده است. این نمودارها برای سیستم سه بعدی  $D=3$  و برای حالت  $\sigma=2$ ، رسم شده اند. همانطور که در این شکل مشاهده می شود، نمودار خط-نقطه، بالاترین نمودار، مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد، می دانیم حد  $\kappa \rightarrow 0$  که نشان دهنده ی آمار متداول هست، رفتاری شبیه به این منحنی دارد، با این تفاوت که مقدار انحنای برای مقادیر کوچک  $z$  به سمت عدد یک میل می کند [۲]. به عبارتی برای بوزونها با آمار متداول همیشه انحنای مثبت یا رفتار جاذبه خواهیم داشت، ولی در آمار تعمیم یافته ی مورد مطالعه، حتی برای مقادیر کوچک پارمتر  $\kappa$  بازه هایی وجود دارد که سیستم بوزونی دارای رفتار دافعه و یا فرمیونی است. برای بقیه مقادیر مجاز پارمتر  $\kappa$  نیز تغییر علامت انحنای مشاهده می شود. در شکل ۱ منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$  منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$  می باشند.

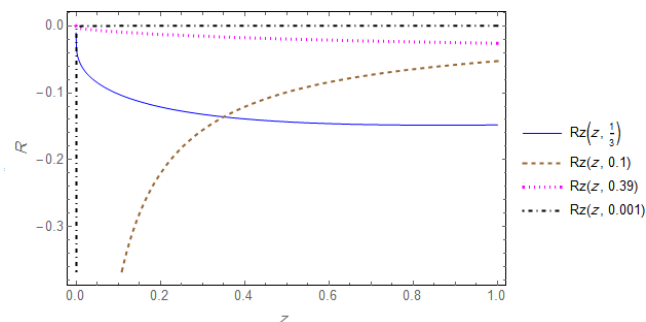
لازم به ذکر است که همه ی حالت های شکل ۲ در حد  $z \rightarrow 1$  مقدار انحنای واگرا می شود که می تواند مانند توزیع متداول دلیلی بر چگالش بوز-انشتین باشد [۲].

مهمی باشند. توزیع تعمیم یافته کاپا در توصیف فیزیک پلاسما و بطور ویژه پلاسماهای فزایی کاربردهای فراوانی یافته است. برخی بررسی ها موید توزیع تعمیم یافته کاپا در این نوع پلاسما است [۱۹،۲۰].

بدیهی است که بررسی خواص آماری چنین توزیع هایی، بخصوص پدیده‌ی چگالش بوز انیشتین، در این سیستم‌ها، راه را برای ارایه مدل های موثر در توصیف سیستم های مختلف فیزیکی که با مدل‌های متعارف ناسازگاری‌هایی دارند باز می‌کند.

### مرجع‌ها

- [۱] G. Ruppeiner; "Thermodynamics: A Riemannian geometric model"; *Phys. Rev. A*, 20, 1608 (1979)
- [۲] H. Mohammadzadeh and F. Adli and S. Nouri; "Perturbative, Thermodynamic Geometry of Nonextensive Ideal Classical, Bose and Fermi Gases"; *Phys. Rev. E*, **94**, 062118 (2016)
- [۳] R. B. Laughlin; "Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations"; *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983)
- [۴] F. D. M. Haldane; "Fractional statistics in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle"; *Phys. Rev. Lett.* **67**, 937 (1991)
- [۵] H. Janyszek and R. Mrugaa; "Riemannian geometry and stability of ideal quantum gases"; *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 467 (1990)
- [۶] Z. Talaie, B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Condensation and critical exponents of an ideal non-Abelian gas"; *The European Physical Journal Plus* **132**, 463 (2017)
- [۷] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Ruppeiner geometry of anyon gas"; *Phys. Rev. E*, **78**, 021127 (2008)
- [۸] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Nonperturbative thermodynamic geometry of anyon gas"; *Phys. Rev. E*, **80**, 011132 (2009)
- [۹] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Thermodynamic geometry of fractional statistics"; *Phys. Rev. E*, **82**, 031137 (2010)
- [۱۰] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Condensation of an ideal gas obeying non-Abelian statistic"; *Phys. Rev. E*, **84**, 031114 (2011)
- [۱۱] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Thermodynamic geometry of deformed bosons and fermions"; *J. Phys. A: Math and Theor.* **44**, 475003 (2011)
- [۱۲] S. Zare, Z. Raissi, H. Mohammadzadeh and B. Mirza; "Condensation of an ideal gas with intermediate statistics on the horizon"; *Euro. Phys. J. C* **72**, 2152 (2012)
- [۱۳] Z. Ebadi, B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Infinite statistics condensate as a model of dark matter"; *JCAP*, **11**, 057 (2013)
- [۱۴] G. Kaniadakis; "Statistical mechanics in the context of special relativity." *Physical Review E* **66**, 056125 (2002).
- [۱۵] L. Tisza; *Generalized Thermodynamics*; 1966 (Cambridge, MA: MIT)
- [۱۶] F. Weinhold; "Metric geometry of equilibrium thermodynamics"; *J. Chem. Phys.* **63**, 2479 (1975)
- [۱۷] G. Ruppeiner; "Thermodynamic curvature measures interactions"; *Am. J. Phys.* **78**, 1170 (2010)
- [۱۸] G. Ruppeiner; "Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory"; *Rev. Mod. Phys.* **67**, 605 (1995)
- [۱۹] M. P. Leubner "Fundamental issues on kappa-distributions in space plasmas and interplanetary proton distributions." *Physics of Plasmas* **11**, 1308 (2004)
- [۲۰] L. A. Gougam, and M. Tribeche. "Electron-acoustic waves in a plasma with a  $\kappa$ -deformed Kaniadakis electron distribution." *Physics of Plasmas* **23**, 014501 (2016)



شکل ۳ : انحنای ترمودینامیکی برای سیستم کلاسیکی با توزیع ماکسول بولتزمن، با  $a=0$ ،  $\sigma=2$ ،  $D=3$  و که منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$ ، منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.39$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$ ، منحنی نقطه-خط چین مربوط به  $\kappa=0.001$  می‌باشند.

نکته‌ی جالب توجه اینکه در گاز کلاسیکی با توزیع تعمیم یافته، برای تمامی مقادیر مجاز و غیر صفر پارامتر  $\kappa$ ، مقدار انحنای منفی است، و یا به عبارتی ذرات کلاسیکی در این توزیع برهمکنش آماری دافع یا فرمیون‌گونه دارند.

### بحث و نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه‌ی سیستم گاز ایده‌آل با تابع توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  پرداختیم. با استفاده از رهیافت ترمودینامیک هندسی انحنای ترمودینامیکی توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  را برای گاز ایده‌آل با برهمکنش کلاسیکی، بوزونی و فرمیونی را محاسبه نمودیم. همانطور که در شکل ۱ مشاهده نمودیم برهمکنش بوزنها با توزیع تعمیم یافته، در بعضی از نواحی فیزیکی مانند بوزنهای متداول رفتار جاذبه و در بعضی از نواحی رفتار فرمیون-مانند، یا دافعه دارند. همچنین برای مقادیر گریزندگی نزدیک به یک انحنای ترمودینامیکی واگرا می‌شود. بنابراین احتمال رخ دادن گذار فاز و چگالش بوز-انیشتین وجود دارد. همانطور که در شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود، برای گاز ایده‌آل کلاسیکی و فرمیونی با توزیع تعمیم یافته، برهمکنش ذرات جاذبه می‌باشد. همچنین رفتار انحنای ترمودینامیکی تمامی رژیم-های گاز ایده‌آل با توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  در حد  $\kappa \rightarrow 0$  منجر به رفتار مشابه گاز ایده‌آل متداول می‌باشد.

بررسی ترمودینامیک هندسی آمارهای رایج مدت‌هاست که انجام یافته است. اما آمارهای تعمیم یافته می‌توانند موضوع قابل تحقیق