

ترمودینامیک هندسی گازهای کوانتومی نافزایشی

عدلی، فرشته؛ محمدزاده، حسین

گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

چکیده

در این مقاله، ترمودینامیک هندسی گازهای بوزونی و فرمیونی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با تعریف تابع توزیع نافزایشی برای آمارهای کوانتومی، کمیت‌های ترمودینامیکی مانند انرژی درونی و تعداد ذرات را به دست می‌آوریم. برای محاسبه‌ی این کمیت‌ها، توابع پلی‌لگاریتم q -تعمیم یافته را تعریف کرده و سپس آنها را به صورت سری حل می‌کنیم. در ادامه، ترمودینامیک هندسی را برای گاز بوزونی (فرمیونی) تشکیل می‌دهیم و نشان می‌دهیم که انحناهای ترمودینامیکی به ازای مقادیر مختلف q مثبت (منفی) است. همچنین تکنیکی انحناهای ترمودینامیکی در $z=1$ نشان می‌دهد که پدیده‌ی چگالش در آمار بوزونی نافزایشی وجود دارد.

Thermodynamic Geometry of Nonextensive quantum Gases

Adli, Fereshteh; Mohammadzadeh, Hosein

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

Abstract

In this paper, thermodynamic geometry of boson and fermion gases is investigated. First, defining the nonextensive distribution function for quantum statistics, we obtain the thermodynamic functions such as internal energy and particle number. For calculating of these quantities, we define the q -generalized polylogarithm functions and then solve them in the form of series. In the following, we construct the thermodynamic geometry for Bose(Fermi) gas and show that the thermodynamic curvature for various values of q , is positive(negative). Also, singularity of thermodynamic curvature at $z=1$ shows that the condensation phenomenon exists in nonextensive Bose statistics.

PACS No. 05

اقتصاد[۵] و غیره دارد. ما در این مقاله، گازهای کوانتومی نافزایشی را با استفاده از رهیافت ترمودینامیک هندسی بررسی می‌کنیم. می‌توان نشان داد که کمیت ترمودینامیکی مهمی به نام انحناهای ترمودینامیکی اطلاعات ارزشمندی درباره‌ی برهمکنش‌های ذاتی، گذار فاز و پایداری سیستم‌های تحت مطالعه دارد. نشان داده شده است که انحناهای ترمودینامیکی گاز بوزونی (فرمیونی) ایده‌آل، برای تمام گستره‌ی فیزیکی مثبت (منفی) است که در تطابق با برهمکنش آماری جاذبه (دافعه) است. انحناهای ترمودینامیکی برای گاز کلاسیکی ایده‌آل غیربرهمکنشی، صفر است که این می‌تواند

مقدمه

تلاش‌های زیادی برای مطالعه‌ی تعمیم‌های ممکن مکانیک آماری رایج و کاربردهای آن‌ها در حوزه‌های مختلف علم انجام شده است. یکی از این تعمیم‌ها که بر پایه‌ی تعمیم آنتروپی است، توسط سالیس در سال ۱۹۸۸ معرفی شد [۱]. در حال حاضر، این آنتروپی تحت عنوان آنتروپی نافزایشی یا q -تعمیم یافته نامیده می‌شود. مکانیک آماری برگرفته شده از این آنتروپی که مکانیک آماری نافزایشی خوانده می‌شود، کاربردهای وسیعی در سیستم‌های کوانتومی در هم‌تنیده و غیردر هم‌تنیده [۲ و ۳]، پلاسماها [۴]،

معیاری برای برهمکنش آماری سیستم باشد. همچنین، نقاط تکیه-ی انحنای ترمودینامیکی در تطابق بلطفگذار سیستم می باشد.

ما ابتدا مدل آماری نافزایشی را معرفی می کنیم و کمیت های انرژی درونی و تعداد ذرات مربوط به آمارهای بوزونی و فرمیونی را به دست می آوریم. سپس توابع پلی لگاریتم را معرفی کرده و روشی برای تبدیل شکل انتگرالی آن به سری ارائه می دهیم. بعد از آن، ساختار ترمودینامیک هندسی سیستم را تشکیل داده و انحنای ترمودینامیکی را محاسبه می کنیم و نمودارهای مربوط به هر کدام از آمارها را رسم می کنیم.

مدل آماری نافزایشی

اگر در یک سیستم، برهمکنش های میکروسکوپیک مؤثر، کوتاه برد باشند و شرایط مرزی، غیرفراکتالی در نظر گرفته شوند، آنتروپی رایج بولتزمن - گیبس (BG)، توصیف خوبی از آن سیستم را می تواند ارائه دهد. آنتروپی چنین سیستم هایی افزایشی است، به این معنی که آنتروپی متناسب با اندازه سیستم است. ولی اگر شرایطی که ذکر شد برقرار نباشند، یعنی سیستم هایی با برهمکنش های مؤثر بلندبرد و شرایط مرزی غیرفراکتالی وجود داشته باشند، آنگاه آنتروپی BG، دیگر افزایشی نخواهد بود. برای کلاس مهمی از چنین سیستم هایی، آنتروپی وجود دارد که بر حسب جمله های احتمالات میکروسکوپی، افزایشی است. این آنتروپی، همان آنتروپی معرفی شده توسط سالیس است که بصورت زیر تعریف می شود [1]:

$$S_q = -k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{1 - q}, q \in R \quad (1)$$

که p_i احتمال یافتن سیستم در حالت میکروسکوپی i ، k_B ثابت بولتزمن، W تعداد کل میکرواحالت ها است و q درجه ی نافزایشی بودن را تعیین می کند. عبارت (1) در حد $q \rightarrow 1$ ، به آنتروپی BG تبدیل می شود:

$$S_{q=1} = S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (2)$$

تابع توزیع نافزایشی بصورت زیر تعریف می شود [6]:

$$n_q(\varepsilon) = \frac{1}{(1 + (q-1)\beta(\varepsilon - \mu))^{1/q-1} + \alpha} \quad (3)$$

که $\beta = 1/k_B T$ ، انرژی حالت یک ذره، μ پتانسیل شیمیایی و $\alpha = -1$ ($\alpha = 1$) متناظر با آمار بوزونی (فرمیونی) نافزایشی است. در حد $q \rightarrow 1$ ، رابطه ی (3) تبدیل به تابع توزیع کوانتومی رایج می شود.

انرژی درونی و تعداد ذرات به صورت زیر تعریف می شوند:

$$U = \int_0^\infty \varepsilon n(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4)$$

$$N = \int_0^\infty n(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5)$$

که در آن $\varepsilon = ap^\sigma$ است (a عدد ثابت و σ در حد نسبیتی (غیرنسبیتی) برابر با 1 (2) است). همچنین، با صرف نظر از اسپین ذرات، شکل استاندارد چگالی حالت ها یعنی $\Omega(\varepsilon)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{A^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \varepsilon^{\frac{D}{\sigma}-1} \quad (6)$$

که در آن، A عدد ثابت و D بعد فضا را نشان می دهد. برای یک گاز بوزونی و فرمیونی نافزایشی، انرژی درونی و تعداد ذرات به صورت زیر به دست می آیند [7]:

$$U = \beta^{\frac{D}{\sigma}-1} \frac{\Gamma(\frac{D}{\sigma} + 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} Li_{\frac{D}{\sigma}+1,q}(z) \quad (7)$$

$$N = \beta^{\frac{D}{\sigma}} \frac{\Gamma(\frac{D}{\sigma})}{\Gamma(\frac{D}{2})} Li_{\frac{D}{\sigma},q}(z) \quad (8)$$

بطوریکه ما تابع پلی لگاریتم تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Li_{\nu,q}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{(1 + (q-1)(x - \ln z))^{1/q-1} + \alpha} dx \quad (9)$$

که $x = \beta\varepsilon$ است و $z = \exp(\mu/k_B T)$ ، گریزندگی گاز نامیده می شود. برای حل انتگرال های مربوط به روابط (7) و (8)، رابطه ی (3) را به ازای $\alpha = \pm 1$ به صورت زیر بسط می دهیم:

$$n_q(\varepsilon) = \sum_{j=1}^\infty (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{j}{1-q}} \left[1 + \frac{(q-1)x}{\eta_q} \right]^{\frac{j}{q-1}} \quad (10)$$

$$g_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = - \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_y$$

$$= \frac{15}{4} \frac{1}{\beta^{7/2} (q-1)^{5/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{5}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (16)$$

$$g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta \partial \gamma} = - \left(\frac{\partial N}{\partial \beta} \right)_\gamma$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{\beta^{5/2} (q-1)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{3}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (17)$$

$$g_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \gamma^2} = - \left(\frac{\partial N}{\partial \gamma} \right)_\beta$$

$$= \frac{1}{\beta^{3/2} (q-1)^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{1}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (18)$$

انحنای ترمودینامیکی به صورت زیر تعریف می شود:

$$R = - \frac{\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \\ 2g_{\beta\beta,\beta} & g_{\beta\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\beta} \\ g_{\beta\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}^2} \quad (19)$$

بطوریکه $g_{ij,k} = \partial g_{ij} / \partial \beta^k$ مشتقات عناصر متریک هستند:

$$g_{\beta\beta,\beta} = - \frac{105}{8} \frac{1}{\beta^{9/2} (q-1)^{5/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{5}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (20)$$

$$g_{\beta\gamma,\beta} = - \frac{15}{4} \frac{1}{\beta^{7/2} (q-1)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{3}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (21)$$

$$g_{\gamma\gamma,\beta} = - \frac{3}{2} \frac{1}{\beta^{5/2} (q-1)^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{1}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (22)$$

$$g_{\gamma\gamma,\gamma} = - \frac{3}{2} \frac{1}{\beta^{3/2} (q-1)^{-1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{1}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (23)$$

که $\eta_q = 1 + (1-q) \ln z$ است. با جاگذاری رابطه ی (۱۰) در (۹) و استفاده از تغییر متغیر $y = (q-1)x/\eta_q$ و به کار بردن انتگرال

$$\int_0^{\infty} (1+y)^\mu y^{\nu-1} dy = \frac{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\mu)} \quad (11)$$

جواب زیر برای توابع پلی لگاریتم تعمیم یافته به دست می آید:

$$Li_{\nu,q}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \frac{\eta_q^{\nu + \frac{j}{1-q}}}{(q-1)^\nu} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \nu)}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (12)$$

در این صورت به ازای $D=3, \sigma=2$ ، انرژی درونی و تعداد ذرات به صورت زیر خواهد بود:

$$U = \frac{3}{2} \frac{1}{[\beta(q-1)]^{5/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{5}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (13)$$

$$N = \frac{3}{2} \frac{1}{[\beta(q-1)]^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{3}{2} + \frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1} - \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (14)$$

ترمودینامیک هندسی

راپینیر و وینهلد دو نوع ساختار متریک ریمانی را معرفی

کردند که به مشتق مرتبه ی دوم آنتروپی یا انرژی داخلی ارتباط داشت [۹و۸]. این نظریه یک ابزار کیفی برای مطالعه ی پدیده های نوسانی معرفی می کند. هندسه ی راپینیر بر پایه ی نمایش آنتروپی است، درحالی که هندسه ی وینهلد بر پایه ی نمایش انرژی است. همچنین در مقاله ی دیگری نشان داده شده است که می توان از تابع پارش برای هندسه ی متریک استفاده کرد [۱۰]:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^i \partial \beta^j} \quad (15)$$

برای مسئله ی ما، $\beta^1 = \beta = 1/k_B T$ و $\beta^2 = \gamma = -\mu/k_B T$ است.

بنابراین عناصر متریک به صورت زیر به دست می آید:

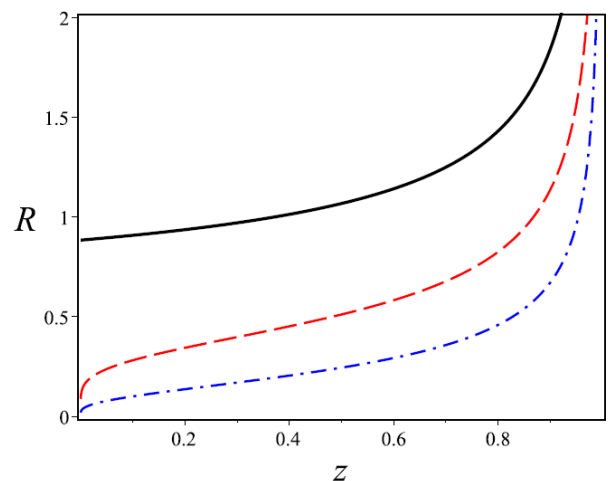
نتیجه گیری

ما ابتدا مدل آماری نافزایشی را معرفی کردیم و کمیت های انرژی درونی و تعداد ذرات را برای گازهای بوزونی و فرمیونی را به دست آوردیم. بعد از آن، ساختار ترمودینامیک هندسی سیستم را تشکیل داده و انحنا ترمودینامیکی را محاسبه می کنیم. نمودار مربوط به گاز بوزونی نافزایشی نشان می دهد که انحنا ترمودینامیکی برای گستره ی فیزیکی تعریف شده، مثبت است و این نشان می دهد که برهمکنش آماری برای این آمار جاذبه است. همچنین در $z=1$ تکیگی دیده می شود که نشان دهنده ی وجود گذار فاز در آن نقطه است. نمودار مربوط به گاز فرمیونی نافزایشی بیان می کند که انحنا ترمودینامیکی برای گستره ی فیزیکی تعریف شده، منفی است و این نشان می دهد که برهمکنش آماری برای این آمار دافعه است.

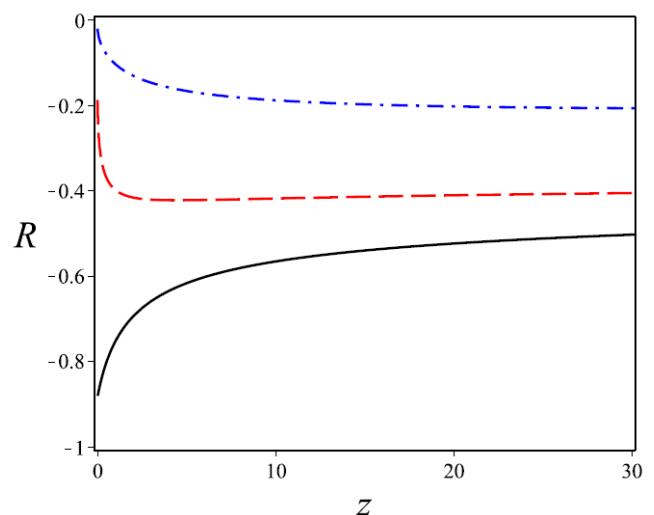
مرجع ها

- [1] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics" , *J. Stat. Phys.* 52, 479 (1988).
- [2] F. Caruso and C. Tsallis, "Nonadditive entropy reconciles the area law in quantum systems with classical thermodynamics", *Phys. Rev. E* 78, 021102 (2008).
- [3] F. D. Nobre, M.A. Rego-Monteiro and C. Tsallis, "Nonlinear Relativistic and Quantum Equations with a Common Type of solution" , *Phys. Rev. Lett.* 106, 140601 (2011).
- [4] S. Guo, L. Mei and Z. Zhang, "Time-fractional Gardner equation for ion-acoustic waves in negative-ion-beam plasma with negative ions and nonthermal nonextensive electrons" , *Phys. Plasmas* 22, 052306 (2015).
- [5] L. Borland, "Option Pricing Formulas Based on a Non-Gaussian Stock Price Model" , *Phys. Rev. Lett.* 89, 098701 (2002).
- [6] F. Buyukluhc and D. Demirhan, "A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases", *Phys. Lett. A*, 181, 24(1993).
- [7] H. Mohammadzadeh, F. Adli, S. Nouri, "Perturbative thermodynamic geometry of nonextensive ideal classical, Bose, and Fermi gases" *Phys. Rev. E* 94, 062118 (2016).
- [8] G. Ruppeiner, "Thermodynamics: A Riemannian geometric model" *Phys. Rev. A* 20, 1608 (1979).
- [9] F. Weinhold, "Metric geometry of equilibrium thermodynamics", *J. Chem. Phys.* 63, 2479 (1975).
- [10] H. Janyszek and R. Mrugala, "Riemannian geometry and stability of ideal quantum gases" *J. Phys. A* 23, 467 (1990).

حال می توانیم انحنا ترمودینامیکی را برای دو حالت آمار بوزونی به ازای علامت +1 و فرمیونی به ازای -1 محاسبه کنیم. محاسبات را انجام داده و نتایج را بر حسب گریزندگی در شکل های (1) و (2) رسم می کنیم. همانطور که می بینیم به علت اینکه پتانسیل شیمیایی برای گاز بوزونی منفی است، گریزندگی بین 0 و 1 در نظر گرفته شده است.



شکل 1: نمودار انحنا ترمودینامیکی بر حسب گریزندگی برای گاز بوزونی نافزایشی به ازای $q=1$ (خط پر سیاه)، $q=1.1$ (خط چین قرمز)، $q=1.2$ (نقطه-خط آبی)



شکل 2: نمودار انحنا ترمودینامیکی بر حسب گریزندگی برای گاز فرمیونی نافزایشی به ازای $q=1$ (خط پر سیاه)، $q=1.1$ (خط چین قرمز)، $q=1.2$ (نقطه-خط آبی)