



جمهوری اسلامی ایران
سازمان آموزش و ترویج و تعلیمات عالی

دانشگاه علوم پایه
گروه آموزش فیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه پایان نامه کارشناسی ارشد
رشته فیزیک گرایش بنیادی (نظری)

مطالعه ناهمخوانی کوانتومی در سیستم های اسپینی کوانتومی

پژوهشگر:

مجید جلائی مقدم

استاد راهنما:

دکتر قادر نجارباشی

استاد مشاور:

حسن بهمنی

مهر ۱۳۹۷

عنوان و نام پدیدآور:	مطالعه ناهمخوانی کوانتومی در سیستم های اسپینی کوانتومی - مجید جلایی مقدم
استادان راهنما:	دکتر قادر نجار باشی
استادان مشاور:	حسن بهمنی
تاریخ دفاع:	۱۳۹۷/۰۷/۳۰
تعداد صفحات:	۸۹
شماره پایان نامه:	فیزیک

چکیده:

هدف: ناهمخوانی کوانتومی چگونه نوعی همبستگی های کوانتومی متفاوت با همبستگی های غیر موضعی سیستم های در هم تنیده را نشان می دهد و اینکه چگونه ناهمخوانی کوانتومی می تواند نواحی گذار فاز کوانتومی را در نزدیکی نقطه بحرانی نشان دهد.

روش شناسی پژوهش: مدل خاصی با همیلتونین معلومی داریم و ماتریس چگالی حالت خاصی (پایه ها حالات برانگیخته) از سیستم را محاسبه می کنیم. آن گاه این که آیا حالت در هم تنیده ها جداپذیر است را مشخص می کنیم. اگر در هم تنیده است که قطعاً ناهمخوانی کوانتومی نیز دارد ولی اگر جداپذیر است باید ناهمخوانی آن بررسی شود.

یافته ها: محاسبه ناهمخوانی کوانتومی در سلول سه اسپینی ($1/2, 1/2, 1/2$) در مدل XXZ هایزنبورگ بر حسب دما و میدان مغناطیسی، برای دو بر هم کنش پادفرم مغناطیس و فرم مغناطیس، که با تغییر دما و میدان مغناطیسی نقاط گذار فاز کوانتومی را نشان می دهد.

نتیجه گیری: با توجه به تعریف ناهمخوانی کوانتومی و بررسی آن در چندین مدل مختلف و همچنین محاسبه ناهمخوانی کوانتومی در سلول سه اسپینی ($1/2, 1/2, 1/2$) در مدل XXZ هایزنبورگ بر حسب دما و میدان مغناطیسی، متوجه می شویم که تغییر برخی از پارامترها مانند دما و میدان مغناطیسی باعث تغییرات در مقدار ناهمخوانی کوانتومی می شود که در برخی از این موارد این تغییرات به صورت آنی اتفاق می افتد که نشان دهنده گذار فازهای موجود در سیستم است. بنابراین با استفاده از ناهمخوانی کوانتومی می توان ویژگی های بحرانی سیستم های بس ذره ای را مورد بررسی قرار داد.

واژه های کلیدی: گذار فاز کوانتومی، ناهمخوانی کوانتومی.

امروزه محاسبات و اطلاعات کوانتومی توجه بسیاری از محققان فیزیک، علوم اطلاعات و ریاضیات را به خود جلب کرده است [۱]. در هم تنیدگی همواره به عنوان منبعی مهم در پردازش اطلاعات کوانتومی در نظر گرفته شده است، که نقش مهمی در بسیاری از پروتکل‌های کوانتومی دارد [۲]. در هم تنیدگی کوانتومی تنها نوع همبستگی کوانتومی، برای پردازش اطلاعات کوانتومی نیست [۳، ۴] و از لحاظ نظری و آزمایشگاهی [۵] نشان داده شده که می‌توان برخی از وظایف را در حالت کلاسیکی با استفاده از حالت جداپذیر و مخلوط انجام داد. ناهمخوانی کوانتومی ابتدا به این صورت معرفی شده که نوع دیگری از همبستگی کوانتومی است که متفاوت از همبستگی کلاسیکی است [۶]. اما در سال ۲۰۰۸ نشان داده شد که حالت‌های جداپذیر با ناهمخوانی کوانتومی می‌تواند برای محاسبات کوانتومی برای یک کیوبیت نیز استفاده شود [۵]. بعدها اشخاص دیگری هم سنجه‌هایی را برای ناهمخوانی کوانتومی مطرح کردند [۷، ۸].

به طور کلی دو نوع ناهمخوانی کوانتومی وجود دارد: ناهمخوانی مبتنی بر اندازه‌گیری و ناهمخوانی مبتنی بر فاصله. در مرجع [۳، ۶] تعریف اصلی ناهمخوانی، ناهمخوانی مبتنی بر اندازه‌گیری معرفی شده است. این نوع از ناهمخوانی براساس این واقعیت است که اندازه‌گیری موضعی بر روی یک زیر سیستم از یک سیستم چند جزئی، کل سیستم را مختل می‌کند. به طور کلی امکان دستیابی به تمام اطلاعات موجود در یک زیر سیستم، تنها با انجام اندازه‌گیری موضعی بر روی آن امکان‌پذیر نیست که کاملاً با سیستم‌های کلاسیکی متفاوت است. از لحاظ فیزیکی، ناهمخوانی مبتنی بر فاصله در مرجع [۷، ۸] مورد استفاده قرار گرفته است، که این نوع از ناهمخوانی به صورت کمترین فاصله از یک حالت کوانتومی و تمام حالت‌هایی با ناهمخوانی صفر تعریف شده است. در مرجع [۷] آنتروپی نسبی را به عنوان سنجه‌ای برای اندازه‌گیری فاصله دو حالت استفاده کرده است، که یک دید کلی از همبستگی‌ها با کمک آنتروپی نسبی کوانتومی در مرجع [۷]

ایجاد شده است. در مقایسه با تعریف اصلی ناهمخوانی کوانتومی، این نوع تعریف، اجازه می‌دهد تا همه‌ی همبستگی‌ها (همبستگی‌های کلاسیکی، ناهمخوانی کوانتومی و در هم تنیدگی) را به صورت یکسان در نظر بگیریم برخلاف [۷]، نویسندگان مرجع [۸]، عدد مربعی در فضای هیلبرت - اشمیت به عنوان سنجه فاصله‌ی بین دو حالت در نظر گرفته‌اند. به طور خاص، برای سیستم دوکیوبیتی، یک عبارت تحلیلی در مرجع [۸] بدست می‌آید. که شبیه به سنجه هندسی در هم تنیدگی کوانتومی است [۹]. در نتیجه این نوع سنجه نیز سنجه ناهمخوانی کوانتومی هندسی (ناهمخوانی هندسی) نامیده می‌شود. سنجه‌های دیگر ناهمخوانی کوانتومی نیز در مرجع [۱۰] پیشنهاد شده است.

هم‌چنین گذارهای فازی نقش مهمی در طبیعت ایفا می‌کنند. هر روزه مثال‌های زیادی از گذار فاز در طبیعت می‌بینیم. جوش آمدن آب یا ذوب شدن یخ نمونه‌هایی از گذار فاز هستند. جهان پیرامون ما نیز می‌تواند از چندین گذار فاز عبور کرده باشد. - هنگامی که پلاسماهای با دماهای بالا ناشی شده از حادثه بیگ بنگ سرد شود تا جهانی که ما در آن هستیم به وجود آید. گذارهای فاز در اثر تغییر یک پارامتر کنترل خارجی به وجود می‌آید. ویژگی رایج آنها این است که تغییر کیفی در خواص سیستم به وجود می‌آید. گذار فازهایی که در طبیعت داریم و در بالا اشاره شد در دماهای متناهی اتفاق می‌افتد و نظم ماکروسکوپی آنها به وسیله افت وخیزهای گرمایی از بین می‌رود. در طول سالهای اخیر نوع متفاوتی از گذار فازها که در دمای صفر مطلق اتفاق می‌افتد توجه فیزیکدان‌ها را جلب کرده است. با تغییر یک پارامتر کنترل غیرگرمایی از قبیل فشار، میدان مغناطیسی یا ترکیب شیمیایی این گذارها که موسوم به گذار فاز کوانتومی است حاصل می‌شود. پس نظم سیستم تنها توسط افت وخیزهای کوانتومی که ریشه در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دارند به هم می‌خورد. گذار فازهای کوانتومی، موضوع بسیار پرطرفدار در فیزیک ماده چگال هستند [۱۱، ۱۲].

در نگاه اول مطالعه چنین نقاطی در دیاگرام فازی ممکن است یک مسئله حاشیه‌ای باشد که فقط مورد علاقه متخصصان است، زیرا چنین گذارهایی در تنها یک مقدار خاصی از یک پارامتر کنترل در دمای غیرقابل دسترس صفر مطلق اتفاق می‌افتد. اما پیشرفت‌های نظری و تجربی در دهه‌های اخیر نشان داده است که عکس آن درست است. در واقع، حضور چنین نقاط بحرانی در دمای صفر مطلق کلید بسیاری از معماهای حل نشده سیستم‌های ماده چگال است. از جمله می‌توان به عایق‌های مغناطیسی نادر

[۱۳]، ترکیبات فرمیونی سنگین [۱۴]، ابرساناهای با دمای بالا [۱۵]، و گازهای الکترونی دوبعدی [۱۱] نام برد.

گذارهای فازی عمدتاً، به دودسته گذار فاز مرتبه اول و گذار فاز پیوسته تقسیم می‌شوند. در گذار فاز مرتبه اول دوفاز در دمای گذار همزیستی دارند، مثالهایی از این قبیل آب و یخ در دمای صفر درجه یا آب و بخار در دمای ۱۰۰ درجه هستند. در مقابل، در گذار فازهای پیوسته، دو فاز همزیستی ندارند. مثلاً، گذار فرومغناطیسی آهن در دمای ۷۷ درجه که بالاتر از آن گشتاورهای مغناطیسی صفر می‌شوند. گذار فاز در نقطه‌ای روی می‌دهد که افت و خیزهای گرمایی نظم گشتاورهای مغناطیسی را بر هم می‌زند. این اتفاق به طور پیوسته روی می‌دهد، بدین معنی که مادامی که به نقطه گذار نزدیک می‌شویم، مغناطش به طور پیوسته صفر می‌شود. نقطه گذار یک گذار فاز پیوسته نقطه بحرانی نامیده می‌شود. مطالعه گذارهای فاز و بویژه گذارهای پیوسته، یکی از شاخه‌های مهم فیزیک نظری در سالهای اخیر بوده است. گذار فاز پیوسته معمولاً به وسیله یک پارامتر نظم مشخص می‌شود. پارامتر نظم یک کمیت ترمودینامیکی است که در یک فاز (فاز نامنظم) صفر است و در فاز دیگر (فاز منظم) غیر صفر است. گاهی اوقات انتخاب پارامتر نظم برای بعضی گذارها مانند گذار فرومغناطیس که مغناطش پارامتر نظم است واضح و معلوم است، اما در بعضی موارد، یافتن یک پارامتر نظم مناسب، پیچیده و یک موضوع قابل بحث است [۱۷]، مادامی که پارامتر نظم در فاز نامنظم صفر است، افت و خیزهای غیر صفر هستند. نزدیک نقطه بحرانی همبستگی‌های فضایی افت و خیزهای پارامتر نظم بلند برد هستند و طول همبستگی به صورت $\alpha |t|^{-\nu}$ و اگر می‌شود، که ν توان بحرانی طول همبستگی است و t نیز یک سنجه بی‌بعد فاصله از نقطه بحرانی است. به علاوه اگر گذار در یک دمای مخالف صفر T_C اتفاق بیفتد، آنگاه داریم:

$$t = \frac{|T - T_C|}{T_C}. \quad (1-1)$$

علاوه بر همبستگی‌های بلند برد فضایی، همبستگی‌های بلند برد زمانی نیز وجود دارد. نزدیک نقطه بحرانی، زمان همبستگی به صورت $\tau_C \alpha |t|^{-z\nu}$ و اگر می‌شود، که z توان بحرانی دینامیکی است.

در نقطه گذار فاز همبستگی‌های طولی و زمانی بی‌نهایت هستند. افت و خیزها روی مقیاس‌های طولی و زمانی اتفاق می‌افتند و سیستم مقیاس - ناوردا است [۱۸].

۱-۱- ناهمخوانی کوانتومی بر پایه اندازه گیری

در یک سیستم کلاسیکی می‌توان تمام اطلاعات سیستم را بدون برانگیختن آن بدست آورد. با این حال، برای سیستم‌های کوانتومی، به طور کلی این کار غیر ممکن است. اندازه‌گیری می‌تواند سیستم‌های کوانتومی را تغییر دهد و بیان اطلاعات متقابل در نظریه اطلاعات کلاسیکی، برای سیستم‌های کوانتومی یکسان نیست. ایده ناهمخوانی مبتنی بر اندازه‌گیری است.

۱-۱-۱- تعریف ناهمخوانی

ابتدا برخی از مفاهیم کلاسیکی نظریه اطلاعات را بیان می‌کنیم (CIT).

برای یک متغیر تصادفی A که مقدار a را دارد آنتروپی شانون^۱ به این صورت بیان می‌شود:

$H(A) = -\sum_a p_a \log_2 p_a$ که p_a نشان دهنده احتمال متناظر با A است $\{p_a = P_r(A = a)\}$ در مورد دو متغیر تصادفی A و B که با هم ترکیب شده‌اند آنتروپی شانون به این شکل بیان می‌شود:

$H(A, B) = -\sum p_{a,b} \log_2 p_{a,b}$ که $p_{a,b}$ احتمال توزیع مشترک را نشان می‌دهد.

$\{p_{a,b} := P_r(A = a), B = b\}$ مقدار کل همبستگی کلاسیک بین دو متغیر A و B به این صورت است:

$J(A; B) = H(A) - H(A|B)$ که $H(A|B) = -\sum_{ab} p_{ab} \log_2 p_{a|b}$ نشان دهنده آنتروپی شرطی است، $p_{a|b}$ احتمال اینکه $A = a$ است به شرطی که $B = b$ باشد $p_{a|b} = \frac{p_{a,b}}{p_b}$. $J(A; B)$ را می‌توان به این صورت نیز نوشت $I(A; B) = H(A) + H(B) - H(AB)$ که همان اطلاعات متقابل کلاسیکی است.

برای بیان روابط همبستگی و اطلاعات متقابل کلاسیکی در کوانتوم، عدم قطعیت برای ماتریس چگالی ρ با آنتروپی فان نوین بیان می‌شود. $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho)$. بنابراین تعمیم یافته $I(A; B)$ در کوانتوم به این صورت بیان می‌شود.

$$I(\rho_{ab}) := S(\rho_a) + S(\rho_b) - S(\rho_{ab}). \quad (2-1)$$

¹Shannon's entropy

مقدار $I(\rho_{ab})$ اطلاعات متقابل کوانتومی نامیده می‌شود و یک نظریه جامع از همبستگی کل (کلاسیک و کوانتوم) در حالت کوانتومی است، از طرف دیگر عدم قطعیت متوسط در مورد وضعیت A ، بعد از مجموعه کاملی از اندازه‌گیری‌های $\{\Pi_j\}$ که روی سیستم B انجام شده که به این صورت است.

که $S_{\Pi}(\rho_{a|b}) = \sum_j P_j S(\rho_a^j)$ و $P_j = \text{tr}_b(\pi_j \rho_b)$ و $\rho_a^j = \text{tr}_b(\pi_j \rho_{ab})$ بنابراین نسخه کوانتومی $J(A:B)$ که مستقل از جهت اندازه‌گیری در فضای هیلبرت است را می‌توان به این شکل تعریف کرد.

$$C(\rho_{ab}) := S(\rho_a) - S_{\Pi}(\rho_{a|b}). \quad (۳-۱)$$

در مرجع [۵۲] اولیور و زوریک^۲ متوجه شدند که بیان کلاسیکی $J(A:B)$ و $I(A:B)$ با هم برابر است اما در کوانتوم ممکن است متفاوت باشد. که اختلاف دو رابطه (۱-۲) و (۱-۳) باعث ناهمخوانی کوانتومی شود.

$$QD(\rho_{ab}) = \overline{QD}(\rho_{ab}) := I(\rho_{ab}) - \max\{C(\rho_{ab})\}. \quad (۴-۱)$$

ناهمخوانی کوانتومی (QD) یک مقدار نامنفی نامتقارن است. که تنها در حالتی که یک توزیع احتمال کلاسیکی مشترک دارد (جدپذیر کلاسیکی) دارد به صفر می‌رسد،

$$\sum P_{ij} |i_a\rangle \langle i_a| \otimes |j_b\rangle \langle j_b|, \quad (۵-۱)$$

که $\{|j_b\rangle\}$ و $\{|i_a\rangle\}$ پایه‌های اورتونرمال برای سیستم $A(B)$ است. (مراجعه شود به مرجع [۲۰]، که در مورد خواص تقارن کمیت همبستگی کوانتومی است). ناهمخوانی کوانتومی یک معیار مبتنی بر مفاهیم نظریه اطلاعات است و می‌خواهد تمام همبستگی کوانتومی موجود در یک حالت کوانتومی را مشخص کند [۱۹].

ماکزیموم‌سازی روی تمام اندازه‌گیری‌های ممکن $\{\Pi_B^j\}$ انجام می‌شود که برای از بین بردن وابستگی ناهمخوانی به اندازه‌گیری معرفی شده است. بخش اول رابطه همبستگی کل (کلاسیکی و کوانتومی) سیستم را نشان می‌دهد و بخش دوم نشان دهنده تمام اطلاعاتی است که می‌توان با انجام اندازه‌گیری موضعی بر روی زیر سیستم b بدست آورد. که اغلب به عنوان همبستگی کلاسیکی مطرح می‌شود. از بحث بالا می‌بینیم که ناهمخوانی، اختلاف بین همبستگی کل و همبستگی کلاسیکی است. که این نشانگر

²Ollivier and Zurek

همبستگی کوانتومی است که به صورت موضعی قابل دسترس نیست. در اینجا \overline{QD}_{ab} به معنای ناهمخوانی کوانتومی ρ_{ab} با انجام اندازه‌گیری روی زیر سیستم b است. همچنین می‌توانیم اندازه‌گیری‌ها روی زیر سیستم a انجام دهیم و ناهمخوانی مربوط به \overline{QD}_{ab} را بدست آوریم. تعریف معادل ناهمخوانی به صورت زیر است:

$$\overline{QD}_{ab}(\rho_{ab}) = I(\rho_{ab}) - \max \{I(\Lambda_b(\rho_{ab}))\}, \quad (۶-۱)$$

که

$$\Lambda_b(\rho_{ab}) = \sum_j (I \otimes \Pi_b^j) \rho_{ab} (I \otimes \Pi_b^j) = \sum_j P_j \rho_{aj} \otimes |j_b\rangle \langle j_b|. \quad (۷-۱)$$

با استفاده از آنتروپی فان نویمان (نگاه کنید به مرجع [۲۳]) می‌توان ثابت کرد که تعریف ناهمخوانی اشاره شده در بالا، معادل با بخش اول رابطه (۴-۱) است. این تعریف ناهمخوانی را می‌توان به عنوان مینیموم از همبستگی اندازه‌گیری شده توسط اطلاعات متقابل کوانتومی به دلیل اندازه‌گیری تفسیر کرد.

همانطور که از روابط (۴-۱) و (۶-۱) به وضوح دیده می‌شود فرآیند بهینه‌سازی برای محاسبه ناهمخوانی پیچیده است. به این ترتیب بررسی ناهمخوانی کوانتومی برای حالت‌های عمومی کار دشواری است. برای ساده‌ترین حالت دو جزئی، بیان تحلیلی ناهمخوانی تنها برای یک بخش خاص از حالت‌های متقارن مانند بل قطری شده^۳ [۲۴]، رنک دو^۴ [۲۵]، و حالت X [۲۶]، بدست آمده است. اخیراً برای حالت N کیوبیتی X نیز ناهمخوانی کوانتومی محاسبه شده است [۲۷].

۲-۱-۱- خواص اولیه ناهمخوانی

برخی از ویژگی‌های اساسی ناهمخوانی عبارت است از:

(۱) ناهمخوانی همواره نامنفی است و تقریباً تمام حالت‌های کوانتومی ناهمخوانی غیر صفر دارند، $\overline{QD}_{ab} \geq 0$ و $\overrightarrow{QD}_{ab} \geq 0$ [۲۳].

(۲) ناهمخوانی صفر است اگر و تنها اگر اندازه‌گیری‌های موضعی نتواند سیستم‌های کوانتومی را مختل کند [۲۸].

$$\overline{QD}_{ab} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_b(\rho_{ab}) = \rho_{ab}, \overrightarrow{QD}_{ab} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_b(\rho_{ab}) = \rho_{ab} \quad (۸-۱)$$

^۳Bell-Diagonal

^۴rank-2

(۳) به طور کلی ناهمخوانی متقارن نیست $\overrightarrow{QD}_{ab} \neq \overleftarrow{QD}_{ab}$.

(۴) ناهمخوانی با انجام تحولات موضعی بدون تغییر باقی می ماند.

(۵) ناهمخوانی یک حالت خالص دو جزئی با آنتروپی فان نویمان درهم تنیدگی، همخوانی دارد.

ویژگی (۱)، یکپارچگی آنتروپی نسبی کوانتومی را بیان می کند، که به این معنا است که اطلاعات متقابل کوانتومی تحت اندازه گیری موضعی کاهش می یابد [۲۳]. در رابطه (۶-۱) می بینیم که اطلاعات متقابل کوانتومی یک حالت قبل از اندازه گیری همواره بزرگتر یا برابر با حالت کوانتومی بعد از اندازه گیری است. به طور عددی نشان داده شده است که تقریباً تمام حالت های کوانتومی در مرجع [۲۹] دارای ناهمخوانی هستند (ناهمخوانی غیر صفر دارند). اکنون ما یک نمونه ساده برای بررسی این ویژگی ها ارائه می دهیم [۳۰]. حالت دوکیوبیتی زیر را در نظر می گیریم:

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |+\rangle\langle +|), \quad (9-1)$$

که $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ، $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ که هیچ درهم تنیدگی در این حالت وجود ندارد. از یک طرف به راحتی می توان دید که $\overrightarrow{QD}_{ab} = 0$ به این علت که $\Lambda_a(\rho_{ab}) = \rho_{ab}$ است. از طرف دیگر هر اندازه گیری تصویری که بر روی کیوبیت دوم انجام می شود، اولین کیوبیت و ناهمخوانی کوانتومی \overrightarrow{QD}_{ab} را مختل می کند. توجه کنید که در برخی از حالت ها $\overrightarrow{QD}_{ab} = \overleftarrow{QD}_{ab}$ ، که با ویژگی ۳ در تضاد نیست. ویژگی ۴ حاصل این واقعیت است، که آنتروپی فان نویمان $S(\Lambda_b(\rho_{ab}))$ برابر با $S((u_a \otimes u_b) \Lambda_b(\rho_{ab}) (u_a \otimes u_b)^\dagger)$ است. ویژگی ۵ را می توان با استفاده از تجزیه اشمیت یک حالت خالص به طور مستقیم بررسی کرد [۲۴]. با این حال ناهمخوانی در آنتروپی فان نویمان در هم تنیده برای حالت های مخلوط برابر نیست.

حالت های جداپذیر می توانند ناهمخوانی غیر صفر داشته باشند. برای حالت ورنر^۵ $\frac{1}{4}(P|\psi\rangle\langle\psi| + (1-P))$ در صورتی که $P < \frac{1}{3}$ باشد، ناهمخوانی آن بزرگتر از صفر است.

⁵ - Werner state

برای $0 < P < \frac{1}{3}$ حالت جداپذیر است [۲۴]. در نهایت ما می‌خواهیم اشاره کنیم که می‌توان یک نسخه متقارن از ناهمخوانی را به این صورت تعریف کرد.

$$QD_{ab} = \frac{1}{2}(\overline{QD}_{ab} + \overline{QD}_{ab}). \quad (10-1)$$

همچنین می‌توان یک ناهمخوانی کوانتومی دو جزئی را به این صورت تعریف کرد:

$$QD_{ab}^{\max} = \max\{\overline{QD}_{ab}, \overline{QD}_{ab}\}. \quad (11-1)$$

پس حالت کوانتومی ρ_{ab} بدون همبستگی کوانتومی کامل است، اگر $QD_{ab}^{\max} = 0$ باشد.

۲-۱- ناهمخوانی گاوسی

۱-۲-۱- تعریف ناهمخوانی گاوسی

سیستم‌های متغییر پیوسته برای پردازش اطلاعات کوانتومی بسیار مهم هستند [۳۱]. یک رده مهم از حالت‌های متغییر پیوسته حالت‌های گاوسی است، که عملکردهای ویگنر آنها گاوسی است. منابع اصلی در محاسبه ناهمخوانی برای حالت‌های پیوسته، به حداقل رساندن بیش از همه اندازه‌گیری‌های ممکن در یک زیر سیستم است. توجه داشته باشید که اندازه‌گیری‌ها نیز گاوسی هستند. برای حالت گاوسی ρ_{ab} با جایگزینی موضعی بوسیله ماتریس σ به این صورت است $\sigma_{ij} = Tr[\rho_{ab}(R_i R_j + R_j R_i)]$ و $\vec{R} = (x_a, p_a, x_b, p_b)$ بردار عملگر فضا است. با استفاده از عملیات واحد موضعی، ماتریس کوواریانس حالت گاوسی دو مده را می‌توان در یک فرم استاندارد با زیر بلوک-های ماتریس $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma' & \beta \end{pmatrix}$ باشد. ناهمخوانی گاوسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{QD}^{gau}(\rho_{ab}) = f(\sqrt{B}) - f(\lambda_+) - f(\lambda_-) + f(\sqrt{E_m}), \quad (12-1)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2} \log\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{x-1}{2} \log\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad \text{که}$$

$$2\lambda_{\pm}^2 = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4D} \quad \text{و } A = \det \alpha, B = \det \beta, C = \det \gamma, D = \det \sigma$$

$\Delta = A + B + 2C$. همچنین E_m به این صورت تعریف می‌شود:

$$E_m = \begin{cases} \frac{2C^2 + (B-1)(D-A) + 2|C|\sqrt{C^2 + (B-1)(D-A)}}{(B-1)^2} & \text{if } g \leq 0, \\ \frac{AB - C^2 + D - \sqrt{C^4 + (-AB + D)^2 + 2C^2(AB + D)}}{2B} & \text{if } g > 0, \end{cases} \quad (13-1)$$

که $g = (D - AB)^2 - C^2(B + 1)(D + A)$ است. در شرایطی که $g \leq 0$ است، ناهمخوانی گاوسی با مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها و حالت‌های هیترودین^۱ بهینه شده است، که پس از اندازه‌گیری به حالت‌های حرارتی فشرده می‌شوند و در شرایطی که $g > 0$ است ناهمخوانی گاوسی با مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها و حالت‌های هومودین^۲ بهینه شده است، که پس از اندازه‌گیری، حالت‌های خالص بی‌نهایتفشرده شده هستند [۶۸].

۲-۲-۱- خواص ناهمخوانی گاوسی

خاصیت‌های اساسی ناهمخوانی گاوسی به شرح زیر است:

(۱) تقریباً تمام حالت‌های گاوسی دو مده ناهمخوانی گاوسی غیر صفر دارد [۳۲].

(۲) ناهمخوانی حالت‌های گاوسی دو مده جداپذیر، کمتر یا مساوی ۱ است [۳۲].

(۳) حالت‌های گاوسی قوی‌ترین حالت‌های متغییر پیوسته دو جزئی با انرژی ثابت در برابر عدم تنیدگی است. به این علت که تحولات نویزی در زنجیره‌های گاوسی مارکوفین است.

مولفان مرجع [۳۳] تکامل ناهمخوانی گاوسی را در میان دو نوسانگر هارمونیک شدید شده که با یک محیط مشترک انجام می‌شود را بررسی کردند. آنها استدلال کردند که ناهمخوانی گاوسی ممکن است همیشه تقریب خوبی از ناهمخوانی واقعی نباشد، زیرا مقدار تقریبی آن نشان می‌دهد که با دما کاهش نمی‌یابد [۳۳]. در مرجع [۳۴]، ناهمخوانی هندسی برای حالت‌های گاوسی مورد بحث قرار گرفته است. همبستگی کوانتومی حالت‌های غیر گاوسی ورنر نیز در مرجع [۳۴] مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۱- ناهمخوانی گلوبال

¹heterodyne

²homodyne

۱-۳-۱- تعریف ناهمخوانی گلوبال^۶

در اصل تعریف، ناهمخوانی نامتقارن است و برای سیستم‌های چند جزئی مناسب نیست. در مرجع [۳۵] مولفان یک معیار متقارن برای همبستگی کوانتومی چند جزئی به نام ناهمخوانی گلوبال پیشنهاد کردند. این یک تعمیم از ناهمخوانی دو جزئی به سیستم‌های چند جزئی است. فرض کنید ما سیستمی با N ذره داریم که شامل A_1, A_2, \dots, A_N است که ماتریس چگالی آن به صورت $\rho_{A_1, A_2, \dots, A_N}$ باشد. اکنون ما مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های موضعی $\{\Pi_{A_1}^{(j_1)} \otimes \Pi_{A_2}^{(j_2)} \otimes \dots \otimes \Pi_{A_N}^{(j_N)}\}$ را انجام می‌دهیم. ناهمخوانی گلوبال به این شکل تعریف می‌شود:

$$\text{GQD}(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N}) = \min_{\Pi} \left\{ S(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N} \parallel \Lambda(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N})) - \sum_{j=1}^N S(\rho_{A_j} \parallel \Lambda_j(\rho_{A_j})) \right\}, \quad (14-1)$$

که $\Lambda(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N}) = \sum_{j_1, \dots, j_N} (\Pi_{A_1}^{j_1} \rho_{A_1 A_2 \dots A_N} \Pi_{A_1}^{j_1})$ و $\Pi_A^j = (\Pi_{A_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes \Pi_{A_N}^{j_N})$ و $\Lambda_j(\rho_{A_j}) = \sum_k (\Pi_{A_j}^k \rho_{A_j} \Pi_{A_j}^k)$ در اینجا $S(\rho \parallel \sigma) = \text{Tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma)$ ، نشان دهنده آنتروپی نسبی کوانتومی است [۵۷]. در مرجع [۳۵]، بیان تحلیلی از ناهمخوانی گلوبال در حالت دو کیوبیتی GHZ ورنر بدست آمده است. علاوه بر این، همبستگی چند جزئی در زنجیره اشکین تیلیر^۷ مورد بررسی قرار گرفته است. آنها دریافتند که این مدل می‌تواند یک نقطه بحرانی کوانتومی از مرتبه بی‌نهایت را نشان می‌دهد. این پدیده به وسیله اکستریم ناهمخوانی گلوبال بدست می‌آید. اما نمی‌توان آن را از ناهمخوانی دو جزئی از رابطه (۴-۱) بدست آورد. این به وضوح نشان می‌دهد که ناهمخوانی گلوبال در تشخیص همبستگی چند جزئی موثر است. بیان دیگری از ناهمخوانی گلوبال در مرجع [۳۶] ارائه شده است.

$$\text{GQD}(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N}) = \min_{\Pi} \{ I(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N}) - I(\Lambda(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N})) \}, \quad (15-1)$$

که اطلاعات متقابل کوانتومی به شکل زیر تعریف شده است:

$$I(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N}) = \sum_{j=1}^N S(\rho_{A_j}) - S(\rho_{A_1 A_2 \dots A_N}). \quad (16-1)$$

⁶global discord

⁷Ashkin-Teller

این نوع تعریف به ما اجازه می‌دهد که ناهمخوانی گلوبال سیستم‌های چند جزئی را به عنوان مینیوم اطلاعات متقابل تفسیر کنیم.

۱-۳-۲- خواص ناهمخوانی گلوبال

اصلی‌ترین ویژگی‌های ناهمخوانی گلوبال به این صورت است:

(۱) ناهمخوانی گلوبال نامنفی است.

(۲) ناهمخوانی گلوبال متقارن است.

خاصیت اول شبیه به ناهمخوانی سیستم‌های دو جزئی در مرجع [۳۵] است. این ویژگی از یکنواختی آنتروپی نسبی کوانتومی تحت تریس جزئی و خواص اندازه‌گیری تصویر، حاصل می‌شود. خاصیت دوم نیز به علت اینکه اندازه‌گیری موضعی در تمام زیر سیستم‌ها انجام می‌شود، که با بخش اول رابطه (۱-۴) متفاوت است.

۱-۲- ناهمخوانی مبتنی بر فاصله

در بخش قبلی ما برخی از سنجه‌های ناهمخوانی براساس اندازه‌گیری‌ها را بررسی می‌کنیم. در حال حاضر ما دو نوع از ناهمخوانی مبتنی بر فاصله را معرفی می‌کنیم: ناهمخوانی مبتنی آنتروپی نسبی و ناهمخوانی مبتنی بر نگرش مربعی (ناهمخوانی هندسی). ناهمخوانی مبتنی بر فاصله به عنوان مینیموم یک حالت کوانتومی و تمام حالت‌هایی با ناهمخوانی صفر تعریف می‌شود. در مرجع [۳۸] مولفان آنتروپی نسبی را به عنوان سنجه‌ای برای فاصله دو حالت استفاده کردند. مورد دیگر ناهمخوانی مبتنی بر فاصله بر پایه مربع در فضای هیلبرت - اشمیت است که سنجه‌ای برای فاصله بین دو حالت است.

۱-۱-۲- ناهمخوانی مبتنی بر آنتروپی نسبی

با توجه به مرجع [۳۸] ناهمخوانی براساس آنتروپی نسبی به عنوان آنتروپی نسبی بین حالت کوانتومی و نزدیک‌ترین حالت‌های کلاسیک آن تعریف می‌شود.

$$QD^{rel}(\rho) = \min_{\chi \in C} S(\rho \parallel \chi), \quad (1-2)$$

که

$$S(\rho \parallel \chi) = Tr(\rho \log_2 \rho) - Tr(\rho \log_2 \chi). \quad (2-2)$$

بیانگر آنتروپی نسبی بین ρ و χ است. همچنین C تمام حالت‌های کلاسیک را نشان می‌دهد. QD^{rel} حداقل فاصله بین حالت ρ و تمام حالت‌های کلاسیک χ است.

مزایای این اندازه‌گیری عبارت است از: اول اینکه به ما اجازه می‌دهد همه همبستگی‌ها مانند ناهمخوانی کوانتومی همبستگی کلاسیکی و درهم تنیدگی را در یک حد برابر قرار دهیم [۳۱]. این یک دیدگاه یکپارچه از همبستگی کوانتومی و کلاسیک است. معمولاً در مقایسه در هم تنیدگی، سنجه‌هایی که توسط کانکورنس^۸ یا منفی بودن و ناهمخوانی به طور مستقیم بی‌معنی است، زیرا این سنجه‌ها کاملاً متفاوت از همبستگی کوانتومی است [۳۸]. با این حال، می‌توان آنتروپی نسبی، درهم تنیدگی و ناهمخوانی را به طور مستقیم مقایسه کرد. که به ما اجازه می‌دهد بحث و مقایسه رفتار در هم تنیدگی و ناهمخوانی را در یک طرح واحد بررسی کنیم. این رویکرد نیز برای سیستم‌های برای چند جزئی قابل استفاده است. برای حالت‌های قطری بل آنتروپی نسبی در هم تنیدگی و ناهمخوانی می‌تواند به صورت تحلیلی محاسبه شود. توجه داشته باشید که ناهمخوانی مبتنی بر آنتروپی نسبی غیر قابل برگشت است که یک نتیجه مستقیم از نابرابری کلاین^۹ است (نگاه کنید به رابطه (۱۱.۵۱) از مرجع [۲۳]) اگر و تنها اگر حالت در نظر گرفته شده خودش صفر باشد.

۲-۱-۲- ناهمخوانی مبتنی بر مربع یا ناهمخوانی هندسی

ناهمخوانی هندسی شبیه سنجه هندسی درهم تنیدگی است. با توجه به مرجع [۲۳] ناهمخوانی هندسی به این صورت تعریف می‌شود:

$$QD^{geo}(\rho) = \min_{\chi} \|\rho - \chi\|^2, \quad (3-2)$$

جایی که مینیموم نشان‌دهنده تمام حالت‌های کلاسیکی ممکن است که به فرم $P_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes \rho_1 + P_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \otimes \rho_2$ که $P_1 + P_2 = 1$ و $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ دو پایه اورتونرمال زیر سیستم A هستند و ρ_1 و ρ_2 دو ماتریس چگالی زیر سیستم B است. $\|\rho - \chi\|^2 = Tr(\rho - \chi)^2$ نرم مربع فضای هیلبرت - اشمیت^{۱۰} است. به طور خاص، برای سیستم‌های دلخواه دوکیوبیتی، یک عبارت تحلیلی در [۳۷] بدست می‌آید. یک حالت دوکیوبیتی می‌تواند به این صورت نوشته شود:

⁸concurrence

⁹Klein's inequality

¹⁰Hilbert-Schmidt

$$\rho = \frac{1}{4} \left[I_a \otimes I_b + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i \otimes I_b + \sum_{i=1}^3 y_i I_a \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right], \quad (4-2)$$

که $x_i = Tr[\rho(\sigma_i \otimes I_b)]$ و $y_i = Tr[\rho(I_b \otimes \sigma_i)]$ و $t_{ij} = Tr[\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)]$ که σ_i نشان دهنده سه ماتریس پائولی است. ناهمخوانی هندسی حالت دو کیوبیت رابطه فوق به این شکل بدست می‌آید:

$$QD^{geo} = \frac{1}{4} (\|\vec{x}\|^2 + \|T\|^2 - \lambda_{max}), \quad (5-2)$$

که در این رابطه λ_{max} حداکثر مقدار درهم تنیدگی ماتریس $\Omega = \vec{x} \vec{x}^t + TT^t$ را نشان می‌دهد و $\|T\| = \sqrt{t_{11}^2 + t_{22}^2 + t_{33}^2}$ است. این بیان تحلیلی ناهمخوانی هندسی، ما را قادر می‌سازد تا ناهمخوانی کوانتومی حالت‌های دلخواه دو کیوبیت را محاسبه کنیم. همچنین ناهمخوانی هندسی برای حالت‌های دلخواه توسط لو و فو¹¹ [39] محاسبه شد. حد پایین ناهمخوانی هندسی در حالت دو جزئی در [21, 22] مورد بررسی قرار گرفته است. برای حالت $2 \times N$ بعدی، مینی‌موم‌سازی (5-2) می‌تواند به صورت تحلیلی انجام شود. اما محاسبه آن به صورت تجربی دشوار است.

2-2-سنجه‌های دیگر همبستگی کوانتومی

سنجه‌های دیگری از همبستگی کوانتومی مانند اختلال ناشی از اندازه‌گیری (MID) [40] و اطلاعات موضعی غیر قابل دسترس وجود دارد.

MID که توسط لو معرفی شده است [40] بر پایه این است که در اصل می‌توان تمام اطلاعات یک سیستم کلاسیک را با انجام اندازه‌گیری‌ها بدون برهم زدن آن بدست آورد. اگر این سیستم همبستگی کوانتومی داشته باشد، وضعیت اندازه‌گیری سیستم را مختل می‌کند. MID به این صورت تعریف می‌شود:

$$M(\rho_{ab}) = I(\rho_{ab}) - I(\rho'_{ab}), \quad (6-2)$$

که $\rho'_{ab} = \sum_{ij} [(\Pi_a^i \otimes \Pi_b^j) \rho_{ab} (\Pi_a^i \otimes \Pi_b^j)]$ در واقع MID برآیند اندازه‌گیری

آنتروپی است [40] از رابطه فوق، ما می‌بینیم که محاسبه MID آسان است، چون شامل بهینه‌سازی نیست، همانطور که در تعریف اصلی ناهمخوانی در رابطه (4-1) آمده است.

¹¹Luo and Fu

توجه داشته باشید که برای بعضی از حالت‌های کلاسیک MID غیر صفر است که غیر منطقی است. بنابراین یک نسخه دیگر از MID معرفی شده است [۴۱].

$$M^{opt} = I(\rho_{ab}) - \max_{\Pi_a \otimes \Pi_b} I(\rho'_{ab}). \quad (۷-۲)$$

جایی که بهینه‌سازی بیش از اندازه‌گیری‌های موضعی است. این اندازه‌گیری در [۴۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

برای حالت کلاسیکی کاری که می‌تواند از کل سیستم استخراج شود توسط W_{tot} نشان داده شده است. همچنین این کار توسط W_{Locc} نیز می‌تواند از زیر سیستم‌ها با استفاده از عملکرد موضعی مناسب و ارتباطات کلاسیک (Locc) استخراج شود. برای سیستم کلاسیک $W_{tot} = W_{Locc}$ است و برای سیستم‌ها با همبستگی کوانتومی $W_{tot} \neq W_{Locc}$ است. کسری کوانتومی به عنوان اختلاف بین این دو مقدار تعریف می‌شود $W_{tot} - W_{Locc}$. انواع مختلف کسری کوانتومی مانند کسری کوانتومی صفر، یک جزئی و دو جزئی وجود دارد [۴۲، ۴۳].

اطلاعات موضعی غیر قابل دسترس (L_{II}) براساس این واقعیت است که کسری از اطلاعات متقابل کوانتومی به صورت موضعی قابل دسترس نیست.

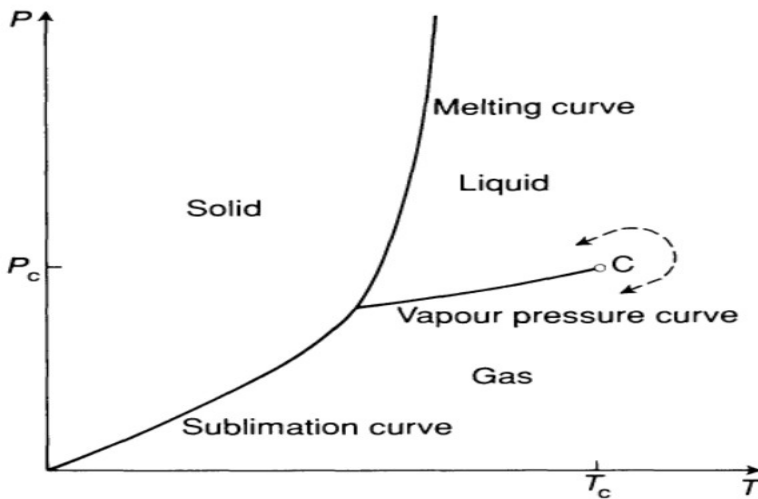
۲-۳- گذار فاز

گذار زمانی اتفاق می‌افتد که یک تکینگی در انرژی آزاد یا یکی از مشتقاتش وجود دارد. چیزی که اغلب اتفاق می‌افتد تغییرات ناگهانی در ویژگی‌های ماده است. گذار از مایع به گاز، یا از رسانا به ابررسانا، یا از پارامغناطیس به فرومغناطیس نمونه‌های رایج هستند.

دیگرام فازی یک شاره معمولی در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. بسته به تغییر دما و فشار آبی‌تواند به صورت مایع، جامد یا گاز وجود داشته باشد. مرزهای فازی خوش تعریف، نواحی که در آن هر حالت پایدار است را جدا می‌کنند. با گذر از مرزهای فازی، جهشی در چگالی و گرمای نهان پدید می‌آید که نشانه گذار فاز مرتبه اول است. فرض کنید در امتداد خط همزیستی گاز-مایع حرکت می‌کنید. همان گونه که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است، با افزایش دما اختلاف در چگالی بین مایع و گاز به طور پیوسته تا صفر کاهش می‌یابد. در نقطه بحرانی صفر می‌شود و ورای آن، این امکان

وجود دارد که به طور پیوسته از فاز شبه مایع به فاز شبه گاز برود. تفاوت در چگالیها، که در زیر دمای بحرانی مخالف صفر است پارامتر نظم گذار گاز-مایع نامیده می‌شود. در دیاگرام فازی آب نقطه بحرانی مهم به نظر می‌آید. اما سر نخ‌هایی وجود دارد که این ممکن است درست نباشد. شکل (۲-۳) گرمای ویژه ارگون بر حسب آیزوچور بحرانی $\rho = \rho_c$ را نشان می‌دهد. یک نشانه قابل توجهی از بحرانی بودن وجود دارد: گرمای ویژه واگرا می‌شود و در دمای بحرانی بی‌نهایت است.

رفتار مشابهی در گذار فازهای مغناطیسی دیده می‌شود. دیاگرام فازی یک فرومغناطیس ساده در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. همانند مورد همزیستی گاز-مایع، یک خط گذار مرتبه اول وجود دارد که در نقطه بحرانی پایان می‌یابد. همه گذارها در میدان مغناطیسی صفر اتفاق می‌افتد، زیرا تقارن یک فرومغناطیس در میدان نمایان می‌شود. تقارن اضافی بدین معناست که راحت‌تر است به زبان مغناطیسی کار کنیم و در تمام کتاب باید همین کار را انجام دهیم.



شکل ۲-۱-۵ دیاگرام فازی یک شاره. به جز نقطه بحرانی C همه گذارها از مرتبه اول هستند. ورای نقطه C این امکان وجود دارد که تا به طور پیوسته از فاز مایع به گاز برویم. مرز بین فازهای جامد و مایع همیشه مرتبه اول است و به نقطه بحرانی ختم نمی‌شود [۴۴]

Title and Author: Study of Quantum Discord in Quantum Spin Systems /Majid Jalai Mogadam

Supervisor: Dr. Ghader Najarbashi

Adviosr: Hasan Bahmani

Graduation date:

Number of pages: 89

Abstract:

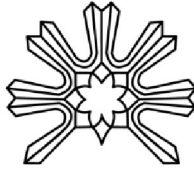
Research Aim: Quantum discord shows how different quantum correlations are different from the nonlinear correlations of interconnected systems and how the quantum discord can show the quantum phase transition regions around the critical point.

Research method: We have a special model with given Hamiltonian and calculate the density matrix of a particular state (base or excited states) of the system. We characterize whether the state is entangled or separable. If it is entangled, it definitely has a quantum discord, but if it is separable, its discord should be checked.

Findings: we compute the quantum discord in three-spin cell $(1/2, 1/2, 1/2)$ in the Heisenberg XXZ model in terms of temperature and magnetic field for antiferromagnetic and ferromagnetic interactions, which shows the quantum phase transition points by varying the temperature and magnetic field.

Conclusion: Given the definition of quantum discord and its examination in several different models, as well as the calculation of quantum discord in a spin cell $(1/2, 1/2, 1/2)$ in the Hezenberg XXZ model in terms of temperature and magnetic field, we find that the change Some of the parameters, such as temperature and magnetic field, make changes the quantum discord, in some cases, these changes occur instantaneously, which indicates the phase transition in the system. Therefore, using the quantum discord, we can investigate the critical properties of the many-particle systems.

Keywords: quantum discord, quantum phase transition



University of Mohaghegh Ardabili
Faculty of Sciences
Department of Physics

Thesis submitted in partial fulfilment for the degree
M.Sc.In Fundamental Physics

Study of Quantum Discord in Quantum Spin Systems

By:
Majid Jalai Mogadam

Supervisor:
Ghader Najarbashi (Ph. D)

Advisor:
Hasan Bahmani

2018